

Luca Zoppetti

# Fenomeni Ondulatori

per il corso di Fisica dell'Università di Bologna

Questi sono gli appunti delle lezioni del del corso di "Fenomeni Ondulatori" che sto seguendo nel secondo semestre del secondo anno di Fisica all'Università di Bologna. Avviso che queste note sono prese in diretta e pertanto saranno sicuramente piene di errori: sarò grato a chiunque decida di segnalarmeli personalmente o tramite gli *Issues* della [repository](#) su GitHub. Tutto quello che pubblico sulla mia pagina è gratuito e ad uso libero per il proprio studio, tuttavia se apprezzassi il mio lavoro e ti andasse di offrirmi un caffè, questo è il mio profilo PayPal: [paypal.me/lucazoppetti](https://paypal.me/lucazoppetti). Buono studio!

17 ottobre 2024



# Indice

<b>1</b>	<b>Oscillazioni</b>	<b>5</b>
1.1	Soluzione generale	5
1.2	Serie di Fourier	7
1.3	Trasformata di Fourier	9
<b>2</b>	<b>Onde meccaniche</b>	<b>12</b>
2.1	Onde su una corda	13
2.2	Equazione di D'Alembert	14
2.3	Onde armoniche	16
2.4	Studio di un'onda progressiva	19
2.5	Riflessione e trasmissione	24
2.6	Onde stazionarie	27
2.7	Onde sonore	31
2.8	Interferenza e battimenti	35
2.9	Effetto Doppler	38
<b>3</b>	<b>Onde tridimensionali</b>	<b>41</b>
3.1	Equazione di D'Alembert tridimensionale	41
3.2	Onde sferiche	43
3.3	Onde vettoriali	45
3.4	Polarizzazione	46
3.5	Principio di Huygens-Fresnel	48
<b>4</b>	<b>Onde elettromagnetiche</b>	<b>52</b>
4.1	Equazione di D'Alembert	52
4.2	Onde nei mezzi	54
4.3	Energia, intensità e vettore di Poynting	55
4.4	Pressione di radiazione	56
4.5	Produzione di onde elettromagnetiche	57
4.6	Spettro elettromagnetico	60
4.7	Propagazione nei materiali	62
4.8	Riflessione e rifrazione	68
4.9	Interferenza	75
4.10	Diffrazione	78
<b>5</b>	<b>Ottica geometrica</b>	<b>82</b>
5.1	Specchi	82
5.2	Diottri	84
5.3	Sistemi ottici	86



# Capitolo 1

## Oscillazioni

### Lezione 3: 5 marzo 2024

#### 1.1 Soluzione generale

Proviamo a risolvere l'equazione dell'oscillatore armonico forzato in maniera generale:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t) \rightarrow x(t) = x_{omo}(t) + x_{part}(t) \quad (1.1)$$

È un'equazione lineare non omogenea, quindi prevede dei gradi di libertà nella soluzione omogenea (ovvero dipende dalle condizioni iniziali), mentre la soluzione particolare è fissata (non dipende dalle condizioni iniziali).

**Lemma 1.1.1 (Principio di sovrapposizione).** Se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sono due soluzioni dell'omogenea, allora  $x_{omo}(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$  per ogni valore di  $a$  e  $b$ .

Si può introdurre un nuovo oggetto matematico: un "operatore funzionale". Al primo membro dell'equazione (1.1) c'è come incognita la funzione  $x$ , quindi possiamo costruire un'operazione da applicare ad  $x$ ,  $\hat{L}$ , che restituisca il primo membro dell'equazione.

$$\hat{L} = m \frac{d^2}{dt^2} + \beta \frac{d}{dt} + k \rightarrow \hat{L}(x) = m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx$$

L'equazione dell'oscillatore armonico diventa quindi  $\hat{L}(x) = f(t)$  con incognita  $x(t)$ . Questa è detta "notazione operatoriale".

**Definizione 1.1.1 (Classe di operatori lineari).** Gli operatori lineari hanno due proprietà:

1. L'operatore si distribuisce sulla somma:  $\forall x, y \quad \hat{L}(x + y) = \hat{L}(x) + \hat{L}(y)$
2.  $\forall$  funzione  $x$  e  $\forall$  costante  $a$ ,  $\hat{L}(ax) = a\hat{L}(x)$

**Esempio.** Conosciamo già esempi di operatori lineari:

- Moltiplicazione per costante:  $\hat{L}(x) = \mu x(t)$
- Derivata (n-esima):  $\hat{L}(x) = \frac{dx(t)}{dt}$ ,  $\hat{L}(x) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$
- Integrale:  $\hat{L}(x) = \int^t x(t') dt'$ ,  $\hat{L}(x) = \int^t x(t')g(t') dt'$
- Qualsiasi combinazione lineare dei precedenti.

L'equazione dell'oscillatore armonico forzato contiene combinazioni di esse, quindi  $\hat{L}$  è un operatore lineare. Studiamone le proprietà.

**Equazione omogenea** Ogni combinazione lineare di soluzioni è soluzione: se  $\hat{L}(x_1) = 0$  e  $\hat{L}(x_2) = 0$  allora  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sono soluzioni. Per la seconda proprietà degli operatori lineari anche  $ax_1(t)$ ,  $bx_2(t)$  sono soluzioni, mentre per la prima proprietà lo è anche la loro combinazione lineare.

È possibile dimostrare che, se  $\hat{L}$  ha derivate fino all'ordine  $n$ , allora esistono al massimo  $n$  soluzioni indipendenti che si possono combinare, quindi  $n$  costanti arbitrarie (eventualmente da determinare conoscendo le condizioni iniziali).

**Equazione non omogenea** Se ho una soluzione particolare e una omogenea, la combinazione lineare senza coefficienti liberi è soluzione. Ogni soluzione è costruita come somma di una soluzione particolare e una soluzione dell'omogenea. Questo si vede semplicemente dall'applicazione delle due proprietà degli operatori lineari.

**Termine noto scritto come somma di funzioni** Una volta trovata la soluzione per  $f_1$  e  $f_2$  (gli addendi della somma) il problema è risolto, poiché la somma delle soluzioni particolari è soluzione generale, sempre per la prima proprietà degli operatori lineari.

Studiamo un oscillatore smorzato con una forzante costante sommata a due funzioni dipendenti dal tempo:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = -mg + F_1 \cos(\Omega t) + F_2 \sin(2\Omega t) = \hat{L}(x)$$

Sfruttiamo la linearità:

1. Cerchiamo la soluzione omogenea:  $\hat{L}(x_{omo}) = 0$ . È un oscillatore smorzato con la stessa soluzione già trovata in precedenza:  $x_{omo}(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega t + \phi_0)$ .
2. Cerchiamo soluzioni delle tre forzanti separatamente:

- Il primo termine rappresenta una forzante costante. La soluzione è nota:  $x_{0p} = -\frac{mg}{k}$ .
- La seconda forzante è armonica, soluzione già vista:

$$x_{1p} = \frac{F_1}{m\sqrt{(\omega_p^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}} \cos(\Omega t - \delta)$$

- La terza forzante non l'abbiamo ancora studiata, ma è possibile risolverla applicando un metodo simile a quello applicato per il coseno. Il seno è la parte immaginaria di un fasore.

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_2 \sin 2\Omega t \rightarrow \ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0 z = \frac{F_2}{m} e^{i2\Omega t}$$

dove  $x(t) = \text{Im}(z(t))$ . Suppongo una soluzione del tipo  $z(t) = Ae^{\lambda t}$  e ottengo  $(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0)Ae^{\lambda t} = \frac{F_2}{m} e^{i2\Omega t}$ . Siccome l'uguaglianza deve essere sempre valida, ottengo che  $\lambda = 2\Omega i$ .

$$(-4\Omega^2 + 2i\Omega\gamma + \omega_0)A = \frac{F_2}{m} \implies A = \frac{F_2}{m[(\omega_0^2 - 4\Omega^2) + i2\gamma\Omega]}$$

Posso scrivere  $A$  come numero complesso con fase  $\delta = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - 4\Omega^2}$  e ottenere

$$z(t) = \frac{F_2}{m\sqrt{(\omega_0^2 - 4\Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \frac{e^{i2\Omega t}}{e^\delta}$$

Di conseguenza,

$$x(t) = \text{Im}(z(t)) = \frac{F_2}{m\sqrt{(\omega_0^2 - 4\Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \sin(2\Omega t - \delta)$$

La soluzione finale sarà quindi la somma dei quattro termini: con la somma di funzioni nella forzante ho diviso il problema in varie parti più semplici. La fisica cerca sempre equazioni lineari: ad esempio, in elettromagnetismo il primo strumento utilizzato per misurare la carica fu l'elettroscopio a foglie, tuttavia non venne utilizzato per definire la carica perché la relazione fra angolo di apertura e carica non è lineare. Le equazioni di Maxwell sono invece tutte di natura lineare: la divergenza è lineare perché contiene derivate e appaiono tutte al grado 1. Anche l'equazione di D'Alembert è un'equazione lineare, così come l'equazione di Schrodinger.

Il "principio di sovrapposizione" vale quindi solo nei sistemi lineari. È l'espressione fisica del concetto di operatore lineare: cerchiamo un problema lineare perché attraverso tale principio possiamo spaccettarlo in problemi più semplici.

## 1.2 Serie di Fourier

Trattiamo ora uno degli strumenti più potenti per risolvere equazioni lineari, tra cui problemi di forzante generica scomponendola in casi particolari. Come generalizziamo quanto studiato finora?

1. Primo passo: consideriamo  $f(t)$  periodica con periodo  $T$ . Quando una funzione è periodica la possiamo risolvere se il periodo è limitato. Questo è il caso del tema di questa sezione, la serie di Fourier.
2. Secondo passo: considerare una funzione non periodica, in altre parole con periodo  $T \rightarrow \infty$ . Questo verrà trattato invece con la trasformata di Fourier.

Iniziamo costruendo una forzante particolare, periodica, per cui posso anche moltiplicare la pulsazione per una costante, con fase iniziale:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega t + \phi_n) \text{ con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$f(t)$  è somma di funzioni di periodo  $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \dots$  quindi è complessivamente periodica di periodo  $T$  (domina  $n=1$ ). Risolviamo cercando:

$$\hat{L}(x_0) = F_0, \dots, \hat{L}(x_n) = F_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

Come al solito, è più conveniente studiare la funzione complessa associata. Posso scrivere  $\hat{L}(x_n) = \text{Re}[F_n e^{i\phi_n} e^{in\omega t}]$ . L'equazione  $n$ -esima diventa quindi  $m\dot{z}_n + \beta z_n + kz_n = (F_n e^{i\phi_n}) e^{in\omega t}$ . Siccome il primo membro deve eguagliare il secondo membro per ogni  $t$ , deve esserci la stessa dipendenza temporale a esponente. Pongo  $z_n(t) = A_n e^{\lambda_n t} \implies \lambda_n = in\omega$ . Definendo  $\gamma = \frac{\beta}{m}$ ,  $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$  posso isolare l'ampiezza:

$$A_n = \frac{F_n e^{i\phi_n}}{m[(\omega_0^2 - (n\omega)^2) + i\gamma n\omega]}$$

La differenza dalle soluzioni viste in precedenza sta nel fatto che in questo caso  $\Omega$  è sostituita da  $n\omega$ . La soluzione complessa è

$$z_n(t) = A e^{in\omega t} = \frac{F_n e^{i(n\omega t + \phi_n)}}{m[(\omega_0^2 - (n\omega)^2) + i\gamma n\omega]}$$

$$x(t) = \text{Re}[z_n(t)] = \frac{F_n}{m} \text{Re} \left[ \frac{e^{i(n\omega t + \phi_n)}}{(\omega_0^2 - (n\omega)^2) + i\gamma n\omega} \right]$$

Le fasi  $\phi_n$  sono eliminabili utilizzando la formula nota per il coseno della somma  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \rightsquigarrow F_n \cos(n\omega t + \phi_n) = F_n \cos \phi_n \cos(n\omega t) - F_n \sin \phi_n \sin(n\omega t)$ . Si può quindi porre  $a_0 = F_0$ ,  $a_n = F_n \cos \phi_n$ ,  $b_n = -F_n \sin \phi_n$  per ottenere  $F_n \cos(n\omega t + \phi_n) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ . Ottengo quindi che

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

**Teorema 1.2.1** (Teorema delle serie di Fourier). Ogni funzione  $f(t)$  limitata, periodica di periodo  $T$ , continua o con al più un numero finito di punti di discontinuità con salto (limite destro e sinistro diversi ma finiti) si può sempre approssimare con la serie

$$f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

dove  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Per opportuni valori di  $a_n$  e  $b_n$  si ha che  $f_N(t) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(t)$  su tutti i punti di continuità del dominio. Gli scarti vanno a zero se  $N$  va a infinito:

$$\forall \varepsilon, \exists N \text{ tale che } \int_0^T (f(t) - f_N(t))^2 dt < \varepsilon$$

**Trovare i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$**  Per trovare i coefficienti della serie di Fourier è necessario conoscere le proprietà di ortonormalità delle funzioni trigonometriche. Per  $n$  e  $m$  interi valgono le seguenti:

- $\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \frac{T}{2} \delta_{nm}$
- $\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \frac{T}{2} \delta_{nm}$
- $\int_0^T \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0$

dove  $\delta_{nm}$  è il delta di Kronecker. È chiaro capire che il motivo di queste proprietà è dato dal fatto che, se  $m$  e  $n$  sono diversi si sta mediando una funzione sia positiva che negativa con media nulla, mentre se  $m$  e  $n$  sono uguali  $\sin$  e  $\cos$  sono elevati al quadrato.

**Definizione 1.2.1** (Funzione di scarto). Riprendiamo la definizione precedentemente accennata di funzione di scarto:

$$\begin{aligned} \lambda_N(a_0, a_n, b_n; n = 1, \dots, N) &= \int_0^T (f(t) - f_N(t))^2 dt = \\ &= \int_0^T \left\{ f(t) - a_0 - \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \right\}^2 dt \end{aligned}$$

Per definizione  $\lambda_N \geq 0$ .

Al fine di avere la migliore possibile rappresentazione della funzione  $f(t)$  è necessario che lo scarto  $\lambda_N$  sia minimo. Considerando un parametro alla volta,  $\lambda_N(a_n, b_n)$  è una funzione quadratica e ha quindi un unico minimo  $\rightsquigarrow$  esisterà un insieme di valori  $a_n, b_n$  che minimizza il valore di  $\lambda_N$ . La condizione di minimo si può esprimere come segue:

$$\frac{\partial \lambda_N(a_0, a_n, b_n; n = 1, \dots, N)}{\partial a_m} = 0$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} -2 \int_0^T \cos(m\omega t) \left\{ f(t) - a_0 - \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \right\} dt = 0 \\ \int_0^T \cos(m\omega t) f(t) dt - \left\{ a_0 \int_0^T \cos(m\omega t) dt + \sum_{n=1}^N a_n \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^N b_n \int_0^T \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt \right\} = 0 \rightsquigarrow \int_0^T \cos(m\omega t) f(t) dt = \frac{T}{2} a_m \end{aligned}$$

perché per le proprietà di ortonormalità delle funzioni trigonometriche viene selezionato solo l' $m$ -esimo termine della sommatoria contenente i termini  $a_n$ . Di conseguenza,  $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) f(t) dt$ . Allo stesso modo è possibile ricavare le espressioni per gli altri coefficienti:

**Formola** (Coefficienti della serie di Fourier).

- $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$
- $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$
- $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$

Si dimostra che per questa scelta di parametri  $\lambda_N \rightarrow 0$  se  $N \rightarrow \infty$ . È immediato riscrivere i risultati ottenuti tramite fasori:

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \qquad \sin(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}$$

Ponendo  $c_0 = a_0$ ,  $c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}$ ,  $c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}$ , si ottiene che

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}$$

La serie di Fourier diventa quindi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Dalla definizione di  $c_n$  si ottiene che

$$\begin{aligned} c_n &= \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt - i \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \end{aligned}$$

**Definizione 1.2.2** (Serie complessa di Fourier). La serie complessa di Fourier è quindi definita come

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

Attraverso la serie complessa di Fourier diventa immediato risolvere un problema con forzante periodica generica. Per ogni  $n$  si ha infatti una soluzione  $x_n(t) = \frac{c_n}{m[(\omega_0^2 - (n\omega)^2) + i\gamma n\omega]} e^{in\omega t}$  e quindi

$$x_{part}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{m[(\omega_0^2 - (n\omega)^2) + i\gamma n\omega]} e^{in\omega t}$$

## Lezione 4: 7 marzo 2024

### 1.3 Trasformata di Fourier

Nella soluzione generale abbiamo studiato esclusivamente funzioni periodiche con proprietà comode che sono spesso verificate nei sistemi fisici. Il secondo passo è studiare una funzione che descriva un effetto limitato nel tempo: possiamo immaginare che abbia un periodo  $T \rightarrow \infty$ .

Consideriamo un intervallo di tempo ampio  $T$  tra  $-\frac{T}{2}$  e  $+\frac{T}{2}$  e risolviamo  $\hat{L}(x) = f(t)$ . In questo intervallo, posso approssimare  $f(t)$  con una serie di Fourier detta  $f_s(t)$ . Nell'intervallo,  $f_s(t) \rightarrow f(t)$ . La serie di Fourier più comoda è la serie complessa.

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+in\omega_0 t} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Mi limito a funzioni continue, integrabili e con  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  finito.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} d\omega \rightarrow 0 \quad \rightarrow \frac{1}{T} = \frac{d\omega}{2\pi} \quad \rightarrow n\omega_0 = nd\omega = \omega$$

La pulsazione  $\omega$  è una variabile continua, anche se è data dal prodotto di un numero intero  $n$  e un infinitesimo  $d\omega$ . Sto operando un passaggio dal discreto al continuo.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt \propto d\omega$$

$$c_n \frac{2\pi}{d\omega} = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \tilde{h}(\omega)$$

$\tilde{h}(\omega)$  è una  
funzione finita

Figura 1.1: Divido per  $d\omega$  per evitare che il secondo membro tenda a zero. Il risultato è una funzione continua e finita, ottenuta integrando su tutti i tempi ( $T \rightarrow \infty$ ).

$$c_n = \tilde{h}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$f_S(t) \rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(\omega) e^{+i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$$

Figura 1.2: Adesso che ho una dipendenza da  $d\omega$  posso trasformare la sommatoria in un integrale. Rappresentando tutti gli  $n$  rappresento tutte le  $\omega$ .

**Definizione 1.3.1 (Trasformata di Fourier).** Data una funzione continua, a modulo integrabile, definita sull'asse reale, si definisce trasformata di Fourier della funzione  $f(t)$ :

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$\tilde{f}(\omega)$  descrive la componente di  $e^{i\omega t}$  nella funzione di partenza. La  $f(t)$  è rappresentabile come sovrapposizione continua di fasori tramite l'antitrasformata di Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

La differenza con la serie di Fourier è che nella trasformata di Fourier siamo passati al continuo, mentre nella serie avevamo delle pulsazioni discrete. Questo procedimento è del tutto generale. Analizziamo le proprietà della trasformata di Fourier. Sia  $\mathcal{F}$  l'operatore trasformata di Fourier:

- $\mathcal{F}$  è lineare:

$$\hat{\mathcal{F}}(af(t)) = a\tilde{f}(\omega) = a\hat{\mathcal{F}}(f(t))$$

$$\hat{\mathcal{F}}(f(t) + g(t)) = \tilde{f}(\omega) + \tilde{g}(\omega) = \hat{\mathcal{F}}(f(t)) + \hat{\mathcal{F}}(g(t))$$

- Le derivate diventano moltiplicazioni, come già visto con i fasori:

Dato  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$

Si ha che  $\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \frac{d(e^{+i\omega t})}{dt} d\omega =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \tilde{f}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [i\omega \tilde{f}(\omega)] e^{+i\omega t} d\omega$$

Quindi  $\hat{\mathcal{F}}(f(t)) = \tilde{f}(\omega) \rightarrow \hat{\mathcal{F}}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = i\omega \tilde{f}(\omega)$

Analogamente  $\hat{\mathcal{F}}\left(\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right) = (i\omega)^n \tilde{f}(\omega)$

### 1.3.1 Applicazione all'oscillatore armonico forzato

Iniziamo applicando ad entrambi i membri della solita equazione la trasformata di Fourier.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}(m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx) &= m\hat{\mathcal{F}}(\ddot{x}) + \beta\hat{\mathcal{F}}(\dot{x}) + k\hat{\mathcal{F}}(x) = \\ &= -m\omega^2\tilde{x} + i\omega\beta\tilde{x} + k\tilde{x} = (-m\omega^2 + i\omega\beta + k)\tilde{x} \\ \hat{\mathcal{F}}(f) &= \tilde{f} \end{aligned}$$

Figura 1.3: Ottengo così un'uguaglianza fra le due trasformate. Applico la seconda proprietà della trasformata di Fourier per cui le derivate diventano moltiplicazioni.  $\tilde{x}$  è la mia incognita.

$$(-m\omega^2 + i\omega\beta + k)\tilde{x} = \tilde{f} \quad \tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{(-m\omega^2 + i\omega\beta + k)}$$

Da cui si ottiene:

$$x_{part}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(\omega)}{(-m\omega^2 + i\omega\beta + k)} e^{+i\omega t} d\omega$$

Figura 1.4: Così ho risolto il problema nello spazio delle pulsazioni. Con l'antitrasformata di Fourier posso trovare la soluzione particolare nello spazio dei tempi.

Non è chiaramente un processo matematico semplice, ma con l'aiuto dei computer questi integrali sono facilmente risolvibili numericamente. Proseguiamo con alcune osservazioni:

1. Le equazioni differenziali lineari si trasformano in polinomi in  $\omega$ :

Operatore lineare:  $\hat{L} = m \frac{d^2}{dt^2} + \beta \frac{d}{dt} + k$

Trasformata di  $\hat{L}$ :  $\hat{\mathcal{F}}(\hat{L}) = (-m\omega^2 + i\omega\beta + k)$

Figura 1.5: Posso vedere la trasformata di Fourier anche come un operatore che agisce su altri operatori.

2.  $t$  e  $\omega$  sono variabili coniugate. La trasformata di Fourier non è necessariamente collegata al tempo, basta avere due variabili coniugate: ad esempio, posso fare la trasformata di Fourier anche di un segnale periodico nello spazio.  $\frac{d}{dt} \leftrightarrow i\omega$ , il primo agisce nello spazio delle  $f(t)$  e il secondo agisce nello spazio delle  $\tilde{f}(\omega)$ .

**Nota (Diverse definizioni di trasformata di Fourier).** La definizione della trasformata di Fourier può essere diversa. Noi non le useremo mai! L'importante è associare l'antitrasformata corretta in base alla definizione di trasformata che abbiamo usato. Alcuni esempi:

- Trovata spesso in ambito fisico o matematico:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

- Trovata spesso in ambito ingegneristico, ponendo  $\nu = \omega / 2\pi$ :

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t} dt \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu)e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

# Capitolo 2

## Onde meccaniche

Facciamo un riepilogo di cosa sono le onde:

- Un'onda è una perturbazione che si propaga nello spazio, partendo da una condizione di "equilibrio".
- Per avere un'onda è necessario avere almeno una grandezza fisica che oscilla: onde scalari, vettoriali, tensoriali.
- Le onde hanno una sorgente, che è un punto o una regione dello spazio da dove parte la perturbazione.
- Le onde hanno una velocità con cui si propagano.
- Possono trasportare informazione, energia, potenza, quantità di moto. Solo quelle quantistiche possono trasportare materia, le altre non trasportano materia.
- Le onde meccaniche richiedono un mezzo di propagazione.

**Caratteristiche delle onde meccaniche** Le onde meccaniche, che sono la prima tipologia di onde che studieremo, hanno alcune caratteristiche generali:

- Si propagano nei mezzi continui.
- Sono oscillazioni coerenti delle posizioni di elementi materiali.
- Possono essere unidimensionali (onde su corda tesa), bidimensionali (noi non le faremo, sono quelle su un tamburo o del mare) o nello spazio (onde sonore, vibrazioni sismiche).
- Per queste onde si studia lo spostamento di un elemento infinitesimo di materiale, quindi sono onde vettoriali. Inizialmente noi le studieremo come onde scalari.
- Esistono due grandi categorie di onde meccaniche: onde trasversali e onde longitudinali. Per le prime la velocità dell'onda è in una certa direzione e il moto del mezzo meccanico è in direzione ortogonale a quella di propagazione (molla oscillata). Nelle onde longitudinali invece l'oscillazione è nella direzione di moto dell'onda (molla compressa).

**Caratteristiche delle onde elettromagnetiche** Le onde elettromagnetiche presentano delle differenze rispetto a quelle meccaniche:

- Si propagano nel vuoto e nei mezzi continui.
- Sono oscillazioni simultanee di campo elettrico e magnetico, sono particolari soluzioni delle equazioni di Maxwell.
- Sono onde vettoriali e trasversali.
- Nel vuoto si muovono sempre alla velocità della luce indipendentemente dal sistema di riferimento: origine della relatività ristretta!

La comodità delle onde meccaniche è che, propagandosi in un mezzo, esiste un sistema di riferimento privilegiato, ovvero il sistema in cui il mezzo è fermo.

## 2.1 Onde su una corda

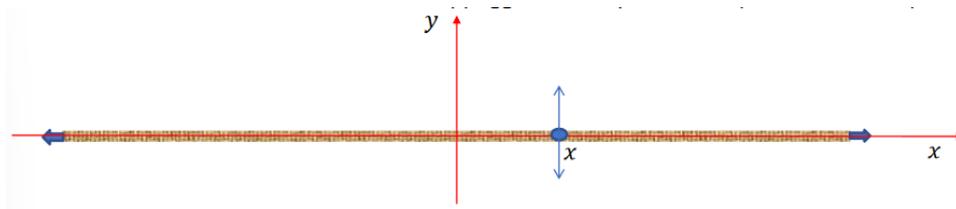


Figura 2.1: Riferimento per lo studio delle onde trasversali su una corda.

La corda è elastica, uniforme, tesa e appoggiata su un piano liscio. La corda si può muovere nel piano  $xy$ . Per ora ci limitiamo allo studio dei casi in cui, preso un punto della corda a coordinata  $x$ , questo si possa muovere solo nella direzione  $y$  (quindi onde trasversali e non longitudinali). Devo studiare una funzione di due variabili che descriva i movimenti verticali della corda:  $\xi(x, t)$ , detta onda o funzione d'onda. Se la corda è ferma,  $\xi(x, t) = 0 \forall x, t$ . Questa è detta condizione di equilibrio. Nel caso di moti sulla corda, la derivata rispetto al tempo della funzione  $\xi$  è diversa da zero:  $\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \neq 0$  è la velocità verticale della corda in  $x$ .

**Dinamica per la funzione  $\xi(x, t)$**  Consideriamo un tratto infinitesimo  $dx$  di massa  $dm$ . La densità di massa sarà  $\frac{dm}{dx}$ .

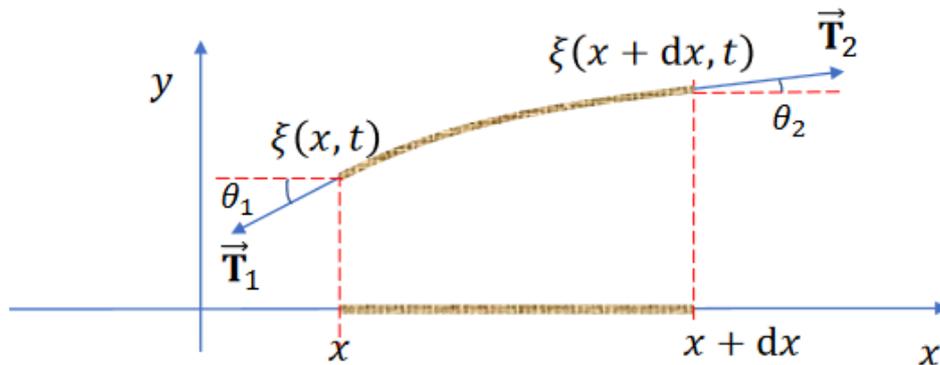


Figura 2.2: Studio della dinamica di un tratto infinitesimo della corda.

Le tensioni nella corda sono dovute al pezzo di corda al di fuori del tratto  $dx$ . Le tensioni sono tangenti alla corda. L'equazione per la dinamica di questo tratto è  $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = dm\vec{a}$ . N.B: l'accelerazione è verticale,  $\vec{a} = a\hat{j}$ . Posso assumere che  $a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ . Per semplificare la trattazione, mi riconduco al regime delle piccole oscillazioni:  $\theta_i \ll 1$ ,  $\cos \theta_i \approx 1$ ,  $\sin \theta_i \approx \tan \theta_i \approx \theta_i$ .

$$\boxed{\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = dm\vec{a}} \rightarrow \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} -T_1 \cos \theta_1 + T_2 \cos \theta_2 = 0 \\ -T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \end{array} \right. \rightarrow \begin{matrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} -T_1 + T_2 = 0 \\ - \end{array} \right.$$

Pongo  $T = T_1 = T_2$ . Ho verificato che il modulo tensione della corda è uguale in ogni verso (per le piccole oscillazioni). Osserviamo che  $\tan \theta_i = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Di conseguenza,  $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}|_x$  e  $\sin \theta_2 \approx \tan \theta_2 = \frac{\partial \xi}{\partial x}|_{x+dx}$ .

$$T(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad T(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) = \mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$T \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_x \right) = \mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_x \right) \frac{1}{dx} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Equazione delle onde su corda.  
Vale per «piccole perturbazioni»

L'equazione appena ricavata è molto importante. Per iniziare, considereremo casi in cui  $\mu$  è costante. È detta equazione di D'Alembert. Per ricordarci che  $\frac{\mu}{T}$  è una quantità positiva, la scriviamo come il quadrato di una quantità. Notiamo che ha le dimensioni dell'inverso di una velocità:  $\frac{\mu}{T} = \frac{1}{v^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ . L'equazione di D'Alembert è lineare, per cui vale il principio di sovrapposizione. Compaiono derivate seconde al primo grado:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

## Lezione 5: 12 marzo 2024

### 2.2 Equazione di D'Alembert

Oggi cerchiamo le soluzioni dell'equazione di D'Alembert. È un'equazione molto generale valida per le onde: meccanica, acustica, fluidodinamica, ottica, elettromagnetismo ecc. Si ottiene nel caso **delle piccole oscillazioni**.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\hat{L} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$$

$\hat{L}$  è un operatore lineare, quindi vale il principio di sovrapposizione. È un'equazione omogenea, quindi è sempre presente la soluzione banale. È un'equazione alle derivate seconde, quindi per ogni punto dell'asse  $x$  è necessario specificare due condizioni iniziali (nell'oscillatore armonico ci bastavano due condizioni iniziali, il punto era solo uno!).

$$\begin{cases} \xi(x, t_0) = f(x) \\ \dot{\xi}(x, t_0) = g(x) \end{cases}$$

Si nota che particolari combinazioni delle variabili spazio e tempo conducono a considerare soluzioni unidimensionali:  $s = x - vt$ ,  $w = x + vt$ . Dimostriamolo.

$$\xi(x, t) = f(s) = f(x - vt) \text{ con } s(x, t) = x - vt$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{df}{ds} = f'$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{df'}{ds} = f''$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = -v \frac{df}{ds} = -v f'$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -v \frac{\partial f'}{\partial t} = -v \frac{\partial f'}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = v^2 f''$$

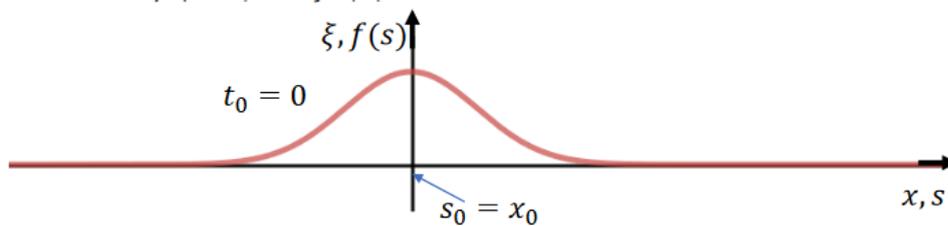
Otengo quindi l'equazione di D'Alembert nella forma  $f'' = \frac{1}{v^2} v^2 f''$ , che è verificata  $\forall f$ . È sufficiente che sia derivabile due volte. Si può dimostrare allo stesso modo che  $\xi(x, t) = g(x + vt)$  è sempre una soluzione. Siamo passati dal cercare funzioni in due variabili al cercare soluzioni in una variabile.

$$\xi(x, t) = f(s) + g(w) = f(x - vt) + g(x + vt) \text{ è soluzione } \forall f, g \in \mathcal{C}^2$$

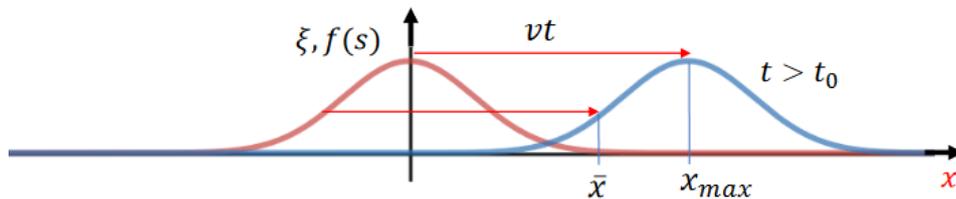
$$\begin{cases} \xi(x, t) = f(x - vt) & \text{è detta onda progressiva} \\ \xi(x, t) = g(x + vt) & \text{è detta onda regressiva} \end{cases}$$

### 2.2.1 Onda progressiva

Studiamo un'onda impulsiva progressiva di forma gaussiana:  $\xi(x, t) = f(s) = Ae^{-\alpha(x-vt)^2}$ . Rappresentiamo la funzione per  $t_0 = 0$  (o equivalentemente in funzione di  $s$ ). In questo caso ha un massimo in  $s_0 = x_0 = 0$ .



Se guardo l'onda in un istante di tempo successivo l'onda si è spostata verso destra:



Il massimo si può trovare sempre ponendo  $s = 0 \rightsquigarrow x_{max} - vt = 0 \rightsquigarrow x_{max} = vt$ . Il massimo si propaga con un'equazione lineare! Non accelera. La forma dell'onda non varia, quindi ogni punto della curva si sposta verso destra con velocità  $v$ :  $s = \bar{s} \rightsquigarrow x - vt = \bar{s} \rightsquigarrow \bar{x} = \bar{s} + vt$ . Queste considerazioni valgono per qualsiasi onda progressiva.

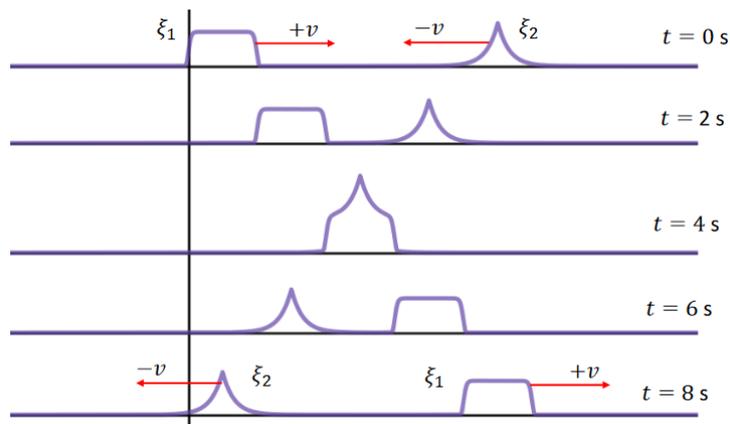
Le onde meccaniche si descrivono sempre nel sistema di riferimento S in cui il mezzo è fermo (è un SdR privilegiato). Se mi muovo in un sistema di riferimento S' con velocità  $v$  verso destra la funzione  $\xi$  non dipende più dal tempo: l'onda appare ferma. Tuttavia non risolve più l'equazione di D'Alembert (non compaiono derivate seconde rispetto al tempo)! Per studiare le onde devo fare attenzione al sistema di riferimento e pormi in quello privilegiato.

### 2.2.2 Velocità di un'onda

Il parametro  $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  rappresenta quindi la velocità apparente di ogni punto dell'onda. Su corde leggere e sottili ( $\mu$  piccolo) le velocità sono grandi. Su corde grandi e spesse ( $\mu$  grande) le velocità sono piccole. Maggiore è la tensione, maggiore è la velocità.

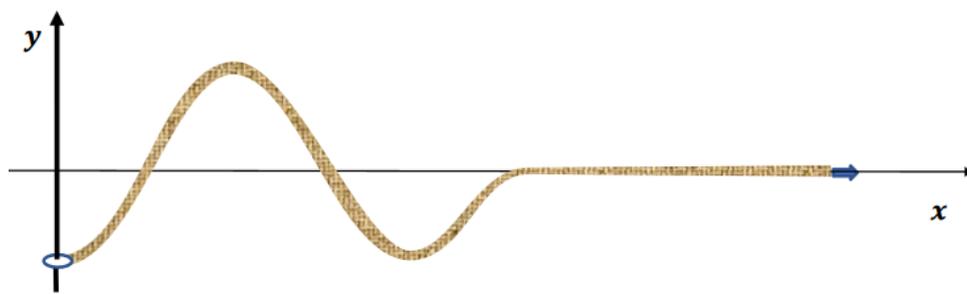
### 2.2.3 Sovrapposizione di onde

Le onde possono urtarsi, ma la loro forma non cambia. Facciamo l'esempio di un'onda regressiva e una progressiva:



### 2.3 Onde armoniche

Consideriamo una corda elastica tesa, vincolata nella posizione  $x = 0$  (detta semi corda). Applichiamo una perturbazione nota sul primo punto della corda:  $\xi(0, t) = -A \sin(\omega t)$  con  $t > 0$ .



Per la forma della corda,  $x_0 = 0$  è sorgente di onde progressive:  $\xi(x, t) = f(x - vt)$ . Considero un tempo  $t_0 > 0$  e cerco il tempo  $t$  a cui stessa la perturbazione si trova in posizione  $x$ .  $\xi(0, t_0) = -A \sin(\omega t_0) = f(x_0 - vt_0) = f(x - vt) = f(s)$ . Di conseguenza,  $s = 0 - vt_0 = x - vt \rightsquigarrow t_0 = t - \frac{x}{v} \rightsquigarrow t = t_0 + \frac{x}{v}$ .  $\frac{x}{v}$  è il tempo che impiega la perturbazione che avviene al tempo  $t_0$  nel punto  $x_0$  a raggiungere il punto a coordinata  $x$ .

$$f(x - vt) = -A \sin(\omega t_0) = -A \sin\left(\omega \left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = A \sin\left(\frac{\omega}{v}x - \omega t\right) = \xi(x, t)$$

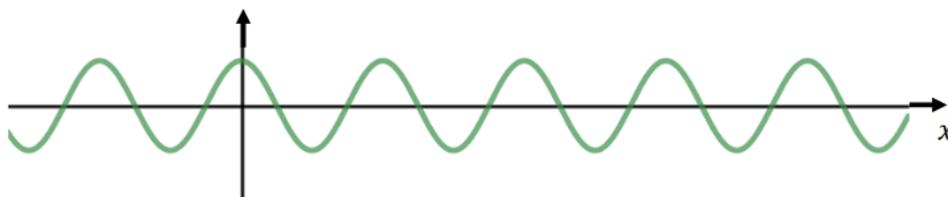
I pezzi della corda si mettono progressivamente in moto.

**Definizione 2.3.1 (Numero d'onda).** Si definisce numero d'onda

$$k = \frac{\omega}{v}$$

L'onda su corda si scrive quindi  $\xi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ . Le onde di questo tipo risolvono l'equazione di D'Alembert e si dicono onde armoniche o monocromatiche (per la loro correlazione con le bande ottiche della luce):

- $\xi(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t)$
- $\xi(x, t) = A \cos(kx \mp \omega t)$



Ogni punto dell'onda si muove con velocità  $v$ .

**Definizione 2.3.2 (Velocità di fase).** Per le onde armoniche si definisce la velocità di fase

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

Essa coincide con il parametro  $v$  dell'equazione di D'Alembert e rappresenta la velocità a cui si propaga una certa fase dell'onda.

Se consideriamo unicamente quello che avviene in un punto di ascissa fissata  $x = \bar{x}$ , notiamo che il moto è armonico di periodo  $T_p = \frac{2\pi}{\omega}$ . N.B.: i punti della corda si muovono con lo stesso periodo dell'oscillazione della sorgente! È una conseguenza generale: le caratteristiche temporali delle onde sono le stesse in ogni punto dello spazio e dipendono esclusivamente dalla sorgente.

Allo stesso modo possiamo studiare quello che avviene a un istante fissato di tempo:  $t = \bar{t}$ . Anche in questo caso si presenta una periodicità, tuttavia è una periodicità spaziale.  $k\lambda = 2\pi \rightsquigarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \rightsquigarrow \lambda = \frac{2\pi}{\omega}v$ . La differenza rispetto a quanto trovato per la periodicità temporale è che in questo caso il valore trovato dipende dalla velocità, che può dipendere dalla posizione nello spazio!  $\lambda$  è detta lunghezza d'onda. La relazione fra  $\lambda$  e  $T$  è la seguente:

**Definizione 2.3.3 (Lunghezza d'onda).**

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}v = vT_p$$

### 2.3.1 Utilizzo delle onde armoniche

L'importanza delle onde armoniche sta nel fatto che posso studiare anche fenomeni descritti da onde complicate, come quelle analizzabili con la serie di Fourier. Consideriamo una sollecitazione periodica dell'origine descritta dalla funzione  $f(t)$ . Pongo  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+in\omega_0 t} \qquad c_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Pongo  $n = -m$ ,

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{-m} e^{-im\omega_0 t}$$

Ma per ogni componente armonica  $\xi_\omega(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$  e quindi

$$\xi(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_{m\omega_0}(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{-m} e^{-im\omega_0\left(t - \frac{x}{v}\right)}$$

Figura 2.3: Abbiamo fatto il cambiamento  $n = -m$  perché nelle onde vogliamo sempre avere  $i(kx - \omega t)$ .

Cambiando il nome di  $m$  in  $n$  e ponendo  $\omega_n = n\omega_0, k_n = n\omega_0/v$ , l'onda progressiva si scrive come somma di onde armoniche:

$$\xi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$

Una singola onda armonica si muove con velocità data da  $v_n = \omega_n/k_n = v$ . Quanto fatto si può generalizzare a un caso in cui le onde sono sia regressive che progressive:

$$\xi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} + d_n e^{i(k_n x + \omega_n t)}]$$

La potenza di quello che abbiamo appena fatto è che possiamo analizzare qualsiasi segnale periodico in partenza. Si può addirittura generalizzare con l'utilizzo della trasformata di Fourier al posto della serie di Fourier se il segnale di partenza NON è periodico.

## Lezione 6: 14 marzo 2024

### 2.3.2 Relazione di dispersione

Più in generale, se il rapporto fra  $\omega$  e  $k$  non è costante, si definisce

**Definizione 2.3.4** (Relazione di dispersione).

$$\omega = \omega(k)$$

È una caratteristica del tipo di onda e del mezzo in cui viaggia.

Sperimentalmente è possibile studiare la relazione di dispersione. Si possono inviare onde armoniche con diverse periodicità temporali ( $T_p, \omega$ ) e spaziali ( $\lambda, k$ ) e valutare sperimentalmente  $\omega(k)$ . Nel caso semplice dell'equazione di D'Alembert questa è lineare come detto prima.

**Mezzi non dispersivi** Se al variare di  $k$  la velocità di fase non varia, allora la relazione di dispersione è lineare e l'equazione di D'Alembert non è un'approssimazione, bensì un'equazione **esatta**. Il mezzo è detto "non dispersivo". Le onde sonore e le onde elettromagnetiche nel vuoto appartengono a questa categoria. Se le onde sonore si propagassero su mezzi dispersivi, la musica sarebbe un disastro. Le onde nei mezzi non dispersivi mantengono la loro forma durante la propagazione.

**Mezzi dispersivi** Se al variare di  $k$  la velocità di fase varia, allora la relazione di dispersione non è lineare:  $\omega = \omega(k)$ . Esempio dell'impulso gaussiano: tipicamente più lontano sono dalla sorgente, più si allarga la gobba della gaussiana. Il mezzo in questo caso è detto dispersivo e l'equazione di D'Alembert è solo una prima approssimazione, a cui andrebbero aggiunti dei termini che descrivono l'effetto dispersivo del mezzo.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Appartengono a questa categoria le onde elettromagnetiche nella materia (l'arcobaleno è dovuto a questo! Colori diversi viaggiano a velocità diverse), le onde sismiche (una stazione lontana dall'epicentro vede onde molto più lunghe di quelle vicine alla sorgente) e le onde sulla superficie dell'acqua. Le onde nei mezzi dispersivi si propagano variando anche la loro forma.

**Esempio (Mezzo dispersivo).** Le onde nei mezzi dispersivi soddisfano equazioni diverse dall'equazione di D'Alembert. Consideriamo per esempio

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Considero un'onda armonica:  $\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ , è un tentativo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k^2 A \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} &= k^4 A \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \cos(kx - \omega t) \\ \rightsquigarrow -k^2 A + a k^4 A &= \frac{1}{v^2} (-\omega^2 A) \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio i coseni si sono semplificati (grazie alla linearità!). Si prosegue trovando la relazione di dispersione:  $\omega^2 = v^2(k^2 - ak^4) \rightsquigarrow \omega = vk\sqrt{1 - ak^2}$ . Se  $ak^2 \ll 1 \implies \omega = vk$  e il mezzo appare non dispersivo. Per  $0 < ak^2 < 1$  il mezzo invece è dispersivo. In generale, quando studio un mezzo non dispersivo devo trovare che al limite la relazione di dispersione tende a quella

di un mezzo non dispersivo.

$$v_f = \frac{\omega}{k} = v \sqrt{1 - ak^2} \rightsquigarrow v = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - ak^2}}$$

$v$  è solo il parametro dell'equazione di D'Alembert. La velocità di fase  $v_f$  è riferita a una sola frequenza.

Generalizzando quanto detto in precedenza per mezzi non dispersivi, si può scrivere

$$\xi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} + d_n e^{i(k_n x + \omega_n t)}]$$

La trattazione di onde progressive e regressive è identica, con la differenza che dobbiamo ricordarci che ogni onda ha una sua velocità di fase.

## Lezione 7: 19 marzo 2024

### 2.4 Studio di un'onda progressiva

Studiamo ora il caso generico di una forza applicata alla sorgente dell'onda su una corda. (Finora abbiamo studiato un moto noto sulla sorgente, non una forza generica).

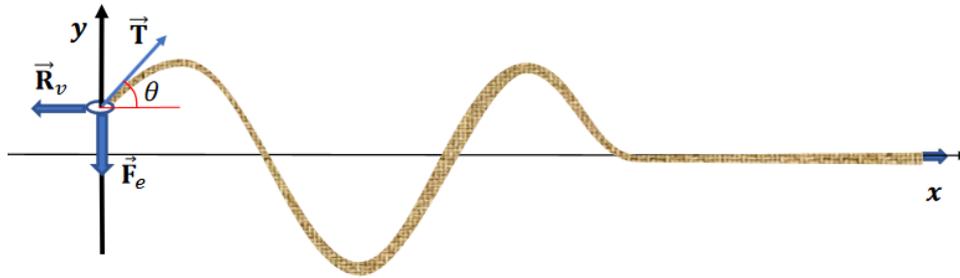


Figura 2.4: Schema della corda studiata.

Impostando l'equazione della dinamica per il moto dell'anello posto in  $x = 0$  otteniamo:

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{T} + \mathbf{R}_v = dm\mathbf{a} \rightsquigarrow \begin{cases} T \cos \theta + R_v = dma_x \\ F_y + T \sin \theta = dma_y \end{cases}$$

Facendo tendere  $dm \rightarrow 0$ , i membri di destra tendono a zero.

$$\begin{cases} T \cos \theta + R_v = 0 \\ F_y + T \sin \theta = 0 \end{cases} \rightsquigarrow F_y = -T \sin \theta \approx -T \tan \theta = -T \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Di conseguenza  $F_y = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0}$ . In questo sistema si producono esclusivamente onde progressive ( $f(x - vt)$ ), se ci fosse un  $+$  al posto del  $-$  tratteremmo invece onde regressive.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{df}{ds} = f' \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = -v \frac{df}{ds} = -v f' = -v \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Per quanto scritto sopra,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \xi}{\partial t} \rightsquigarrow F_y(t) = \frac{T}{v} \frac{\partial \xi(0, t)}{\partial t}$$

La derivata parziale di  $\xi$  calcolata nel punto 0 rappresenta la velocità verticale del punto sorgente, che verrà indicata con  $v_c(t)$ . Inoltre possiamo definire l'impedenza meccanica della corda.

**Definizione 2.4.1** (Impedenza meccanica). Si definisce impedenza meccanica:

$$Z = \frac{T}{v} = T \sqrt{\frac{\mu}{T}} = \sqrt{\mu T}$$

L'effetto della forzante è quindi quello di mettere in moto il primo punto della corda con una velocità proporzionale alla forza (di solito non è così!):

$$F_y(t) = Z v_c(t)$$

Usare  $v$  e  $Z$  al posto di  $T$  e  $\mu$  ci permetterà di trovare risultati molto più generali.

**C'è una forza viscosa?** Sembra che nel sistema ci sia una forza viscosa che porta la forza a essere proporzionale alla velocità. Si possono interpretare le formule come se la corda fosse in grado di applicare una forza dipendente dalla velocità:  $F_v(t) = -Z v_c(t)$ . L'energia non viene dissipata, è assorbita e utilizzata per mettere in moto punti sempre più lontani della corda.

**Nota.**  $v_c(t)$  è sempre in fase con la forzante, quindi siamo sistematicamente in una situazione di risonanza.

### 2.4.1 Energia e potenza

Il lavoro compiuto dalla forzante è  $\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_y dy = F_y \frac{d\xi}{dt} dt = F_y v_c dt$ . Tuttavia, per quanto ricavato prima so che

$$F_y = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad v_c(t) = \frac{\partial \xi(0, t)}{\partial t}$$

E la potenza risulta quindi:

$$\mathcal{P} = \frac{\delta L}{dt} = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=0}$$

Tuttavia la relazione è più generale e vale per ogni punto della corda:

$$\mathcal{P} = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Per le onde progressive sappiamo già che

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (2.1)$$

Di conseguenza la potenza può essere riscritta:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x, t) &= \frac{T}{v} \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2 = T v \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)^2 \\ \mathcal{P}(x, t) &= Z \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

Si vede subito che la potenza è sempre maggiore o uguale a zero. Quanto ricavato è valido in generale per tutte le onde meccaniche.

**Energia cinetica** Consideriamo un tratto infinitesimo di corda  $dx$  in moto con velocità  $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ .

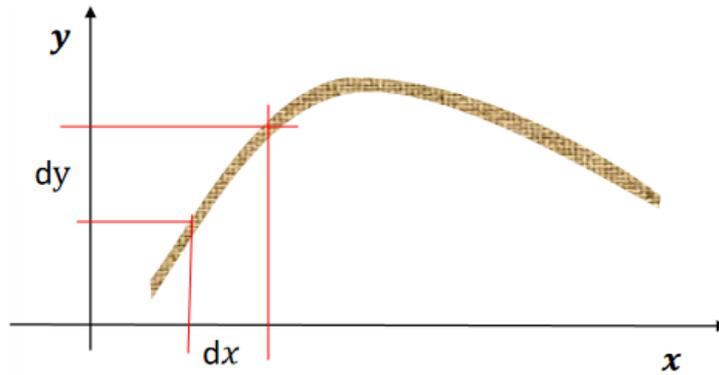


Figura 2.5: L'immagine di riferimento per lo studio di energia cinetica e potenziale sulla corda.

Ottengo che

$$dK = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dx$$

Da cui posso definire una densità lineare di energia cinetica:

$$u_K(x, t) = \frac{dK}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

**Energia potenziale** Si fa riferimento sempre alla [Figura 2.5](#). Il tratto infinitesimo di corda viene allungato facendo lavoro contro la tensione della corda:  $\delta L = -T(dl - dx) = -T(\sqrt{dx^2 + dy^2} - dx)$ . Applicando l'approssimazione delle piccole oscillazioni otteniamo che

$$\begin{aligned} \delta L &= -T dx \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) \approx -T dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \dots - 1 \right) \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx \\ u_P(x, t) &= -\frac{\delta L}{dx} = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

Dove nell'ultima riga abbiamo definito la densità di energia potenziale.

**Energia meccanica** Possiamo definire la densità di energia meccanica:

**Definizione 2.4.2** (Densità lineare di energia meccanica).

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

Nel caso di onde progressive abbiamo le formule già viste nell'equazione (2.1) che collegano la derivata in x alla derivata in t, quindi possiamo ricavare la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} u_K(x, t) &= \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left( v \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu \frac{T}{\mu} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = u_P(x, t) \end{aligned}$$

L'energia potenziale e l'energia cinetica sono uguali istante per istante in ogni punto! Quindi l'energia totale è il doppio dell'energia cinetica e il doppio dell'energia potenziale. La potenza e l'energia trasmessa sono inoltre proporzionali:

Legame potenza energia:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x, t) &= -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{T}{v} \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2 = T v \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)^2 \\ &= T v \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)^2 = 2v \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)^2 = 2v u_p = v u \\ &= \frac{T}{v} \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2 = 2v \frac{1}{2} \frac{T}{v^2} \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2 = 2v \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2 = 2v u_K = v u\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\mathcal{P}(x, t) = v u(x, t)$$

**Potenza ed energia trasmessa sono proporzionali**

### 2.4.2 Scambi di energia

Si fa riferimento alla [Figura 2.4](#). L'energia immessa dalla forzante serve ad indurre un'onda nella corda e viene incamerata dalla corda nella sua forma (è il ruolo della forza viscosa). Quindi l'energia raccolta da ogni elemento della corda viene persa passandola all'elemento di corda adiacente! Questo trasporto di energia è necessario per mettere in moto elementi lontani della corda dove l'onda non è ancora arrivata.

**Esempio.** Consideriamo una semicorda omogenea (con tensione  $T$  e densità di massa  $\mu$ ) il cui estremo è sottoposto al moto  $\xi(0, t) = -A \sin(\omega t) = A \sin(-\omega t)$ , che produce un'onda progressiva:  $\xi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t} &= -\omega A \cos(kx - \omega t), & \frac{\partial \xi}{\partial x} &= kA \cos(kx - \omega t) \\ \mathcal{P}(x, t) &= -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = Tk \omega A^2 \cos^2(kx - \omega t) = \frac{T}{v} \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ &= Z \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ u_K(x, t) &= \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)\end{aligned}$$

Ritrovo inoltre quanto già visto, ovvero che energia cinetica ed energia potenziale sono istante per istante, punto per punto, uguali.

$$\begin{aligned}u_K(x, t) &= \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ u_p(x, t) &= \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} T k^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2} T \frac{\omega^2}{v^2} A^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) = u_K(x, t) \\ u(x, t) &= u_K(x, t) + u_p(x, t) = \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) \\ &= \frac{T}{v^2} \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{v} Z \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{v} \mathcal{P}(x, t)\end{aligned}$$

Tutte le forme di energia appena ricavate dipendono da  $kx - \omega t$ ! Quindi esse sono soluzioni delle equazioni di D'Alembert.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}(x, t)}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Quanto trovato ora è valido per ogni onda meccanica, sia regressiva che progressiva! Ogni volta che ho un'onda meccanica ho delle onde di potenza e delle onde di densità lineare di energia meccanica.

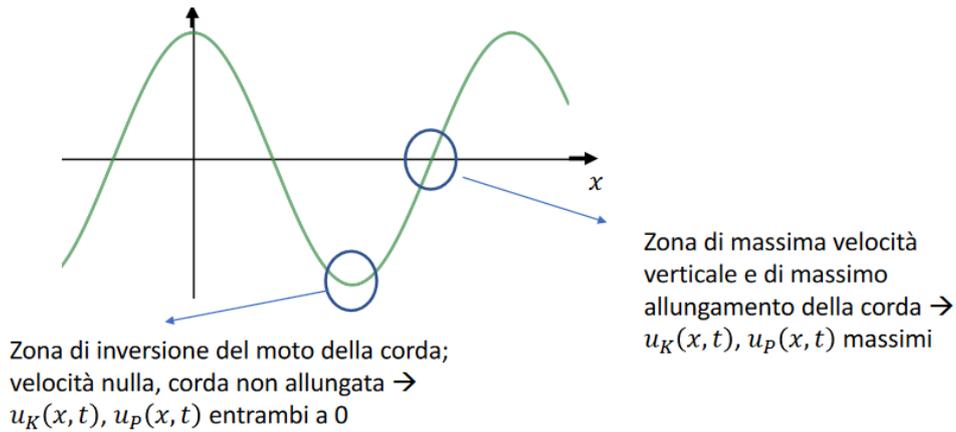


Figura 2.6: Conseguenze della dipendenza di  $u_K$  e  $u_P$  da  $(kx - \omega t)$ .

### 2.4.3 Trasporto di energia e potenza

Le onde meccaniche trasportano energia e potenza, come appena accennato. Ricaviamo la potenza e l'energia media:

$$\langle \mathcal{P}(x, t) \rangle = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} \mathcal{P}(x, t) dt = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2 \neq 0$$

$$\langle u(x, t) \rangle = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} u(x, t) dt = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \neq 0$$

Ricordiamo che invece lo spostamento medio (in cui non compare l'oscillazione elevata al quadrato) è nullo:  $\langle \xi(x, t) \rangle = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} \xi(x, t) dt = 0$ . Le formule ricordano quelle dell'oscillatore armonico: dipendenza dal quadrato dell'ampiezza e dal quadrato della pulsazione.

**Energia trasmessa in un periodo** Ricordando che  $\mathcal{P}(x, t) = Z\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)$ ,

$$E = \int_0^{T_P} \mathcal{P}(x, t) dt = \frac{1}{2} T_P Z \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} T_P \frac{T v}{v} \omega^2 A^2 =$$

$$= \frac{1}{2} v T_P \mu \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \lambda \mu \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Ho ritrovato la formula dell'oscillatore armonico per l'energia presente in un tratto di corda lungo  $\lambda$ :  $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ , ovvero in un periodo  $T_P$ .

### 2.4.4 Intensità

Si definisce l'intensità dell'onda meccanica.

**Definizione 2.4.3 (Intensità).** Per le onde periodiche, si definisce l'intensità dell'onda:

$$I = \frac{E(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} \mathcal{P}(x, t) dt = \langle \mathcal{P} \rangle = \left\langle Z \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right\rangle$$

$I$  è misurata in watt.

Per una singola onda armonica si ritrova il risultato già visto:  $I = \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2$ . Se l'onda è periodica può essere scritta in serie di Fourier, che per le onde periodiche progressive (N.B.: non

scriviamo  $a_0$  perché nel calcolo della potenza compaiono solo derivate e quindi questo termine costante non ha rilevanza) è

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(k_n x - \omega_n t) + b_n \sin(k_n x - \omega_n t)]$$

Che permette di ricavare un'espressione dell'intensità come serie analoga a quanto visto per una singola onda (N.B.: restano solo i termini  $\sin(k_n x - \omega_n t) \sin(k_m x - \omega_m t)$  e  $\cos(k_n x - \omega_n t) \cos(k_m x - \omega_m t)$ ) con  $m = n$ :

$$\mathcal{P}(x, t) = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -T \sum_{n=1}^{+\infty} [-k_n a_n \sin(k_n x - \omega_n t) + k_n b_n \cos(k_n x - \omega_n t)] \sum_{m=1}^{+\infty} [\omega_m a_m \sin(k_m x - \omega_m t) - \omega_m b_m \cos(k_m x - \omega_m t)]$$

$$I = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} \mathcal{P}(x, t) dt = \langle \mathcal{P} \rangle \quad \text{Nel calcolo dell'integrale multi termini si annullano.}$$

$$I = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} \mathcal{P}(x, t) dt = \frac{1}{2} Z \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n^2 (a_n^2 + b_n^2), \quad I = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n$$

Dove è stato posto  $I_n = \frac{1}{2} Z \omega_n^2 (a_n^2 + b_n^2)$ . Questo ci permette di rappresentare lo spettro di potenza dell'onda in funzione della pulsazione, perché  $I_n$  è funzione di  $\omega_n$ .

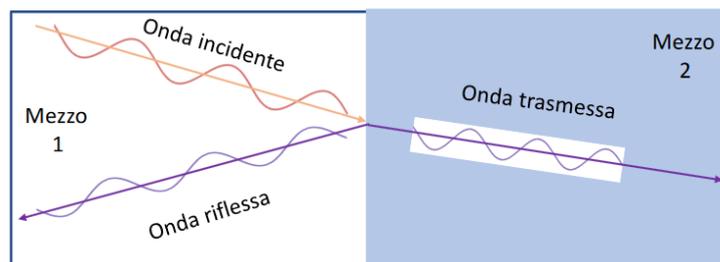
**Nota.** Domande tipiche da orale:

- Perché non si definisce l'intensità per onde impulsive?
- Quale grandezza fisica potrebbe sostituire l'intensità per le onde impulsive?
- Qual è l'espressione dello spettro di potenza se uso la serie complessa di Fourier?

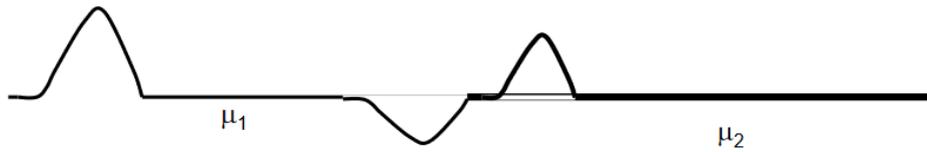
## Lezione 8: 20 marzo 2024

### 2.5 Riflessione e trasmissione

Oggi studiamo i mezzi non omogenei per la trasmissione di onde. In questi mezzi può avvenire il fenomeno della riflessione, al contrario dei mezzi omogenei in cui l'onda si propaga senza cambiare forma. In generale, nel passaggio di un'onda fra due mezzi diversi si possono avere un'onda riflessa e un'onda trasmessa:



Consideriamo ora una corda elastica con due densità diverse (la discontinuità è in  $x = 0$ ):



Se un'onda viene diretta verso la giunzione fra i due pezzi a densità diversa si produrranno due onde: una riflessa (rovesciata nella figura) e una trasmessa (sulla destra nella figura). Per semplicità studiamo onde armoniche:

- Onda incidente:  $\xi_i = A_i \cos(k_1 x - \omega t)$
- Onda trasmessa:  $\xi_t = A_t \cos(k_2 x - \omega_2 t)$
- Onda riflessa:  $\xi_r = A_r \cos(k'_1 x + \omega_1 t)$

Si noti che la tensione resta la stessa in tutta la corda, pur avendo due densità di massa diverse. Le quantità che caratterizzano la corda variano fra le due parti:

$$\mu_1 \neq \mu_2 \implies v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \neq v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \qquad Z_1 = \sqrt{\mu_1 T} \neq Z_2 = \sqrt{\mu_2 T}$$

Definiamo una funzione a tratti che descriva la nostra onda (ricordando che per  $x < 0$  l'onda incidente e l'onda riflessa si sommano!):

$$\xi(x, t) = \begin{cases} \xi_i + \xi_r = A_i \cos(k_1 x - \omega t) + A_r \cos(k'_1 x + \omega_1 t) & \text{per } x < 0 \\ \xi_t = A_t \cos(k_2 x - \omega_2 t) & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Imponiamo alcune condizioni perché  $\xi(x, t)$  sia soluzione dell'equazione di D'Alembert:

1. La corda è diversa per  $x > 0$ , tuttavia non può essere rotta:  $\xi_i(0, t) + \xi_r(0, t) = \xi_t(0, t)$
2.  $\xi(x, t)$  deve essere derivabile due volte per  $x = 0$  e la tensione nel punto di discontinuità (quindi la forma della corda) deve essere continua nel punto di discontinuità:  $\frac{\partial \xi_i(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial \xi_r(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \xi_t(0, t)}{\partial x}$

Applicando le condizioni 1 e 2 ottengo che:

$$\begin{cases} A_i \cos(-\omega t) + A_r \cos(+\omega_1 t) = A_t \cos(-\omega_2 t) \\ -k_1 A_i \sin(-\omega t) - k'_1 A_r \sin(+\omega_1 t) = -k_2 A_t \sin(-\omega_2 t) \end{cases}$$

Guardiamo la prima equazione: stiamo eguagliando funzioni periodiche scritte come somma di coseni, quindi per l'unicità della serie di Fourier devo concludere che  $\cos(-\omega t) = \cos(\omega_1 t) = \cos(-\omega_2 t) \implies \omega_2 = \omega_1 = \omega \rightsquigarrow k'_1 = k_1 = \omega/v_1$ . Devono avere la stessa periodicità! Avevamo già detto che la periodicità temporale dell'onda non dipende dalla corda ma solo dalla sorgente.

$$\begin{cases} A_i + A_r = A_t \\ k_1 A_i - k_1 A_r = k_2 A_t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_i + A_r = A_t \\ A_i - A_r = \frac{k_2}{k_1} A_t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2A_i = \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) A_t \\ 2A_r = \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) A_t \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} A_t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_i \\ A_r = \frac{k_1 - k_2}{k_1} \frac{A_t}{2} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_i \end{cases} \qquad \text{Ma: } k = \frac{\omega}{v} \text{ e } T = Zv \rightarrow k = \frac{\omega}{T} Z$$

$$\rightarrow k_1 = \frac{\omega}{T} Z_1, k_2 = \frac{\omega}{T} Z_2$$

Quanto trovato non è ancora sufficiente, perché sembra che a seconda delle caratteristiche dell'onda (i numeri d'onda) la riflessione e la trasmissione avvengano in maniera diversa.

**Formula (Riflessione e trasmissione).** Sostituendo le impedenze troviamo che le ampiezze riflesse e trasmesse non dipendono dall'onda! Si presenta solo l'impedenza, quindi valgono per tutte le onde e non solo quelle armoniche.

$$\begin{cases} A_t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} A_i \\ A_r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} A_i \end{cases}$$

Studiamo i casi limite di queste formule:

1. Se  $Z_1 = Z_2$ , ovvero se la corda è omogenea, non avviene riflessione:  $A_t = A_i$ ,  $A_r = 0$
2. Se  $Z_1 \gg Z_2$ ,  $A_t = 2A_i$ ,  $A_r = A_i$ : la corda 2 è sottile e l'onda trasmessa ha ampiezza doppia di quella incidente, mentre l'onda riflessa ha lo stesso segno di quella incidente.



3. Se  $Z_1 \ll Z_2$ ,  $A_t \rightarrow 0$ ,  $A_r = -A_i$ : la corda 2 è molto spessa e l'onda non si trasmette nella regione 2, mentre l'onda riflessa è invertita.



### 2.5.1 Analisi energetica

Usiamo quanto trovato ieri per trovare l'intensità delle tre onde:

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_i^2, & I_t &= \frac{1}{2} Z_2 \omega^2 A_t^2, & I_r &= \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_r^2 \\ I_t &= \frac{1}{2} Z_2 \omega^2 A_t^2 = \frac{1}{2} Z_2 \omega^2 \left( \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 A_i^2 = \frac{1}{2} \frac{4Z_2 Z_1}{(Z_1 + Z_2)^2} Z_1 \omega^2 A_i^2 \\ I_r &= \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_r^2 = \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 A_i^2 = \frac{1}{2} \frac{Z_1^2 - 2Z_2 Z_1 + Z_2^2}{(Z_1 + Z_2)^2} Z_1 \omega^2 A_i^2 \end{aligned}$$

Da cui si ricava che la somma delle intensità dell'onda trasmessa e dell'onda riflessa è uguale all'intensità dell'onda incidente, è un modo di scrivere la conservazione dell'energia!

$$I_t + I_r = \frac{1}{2} \frac{4Z_2 Z_1}{(Z_1 + Z_2)^2} Z_1 \omega^2 A_i^2 + \frac{1}{2} \frac{Z_1^2 - 2Z_2 Z_1 + Z_2^2}{(Z_1 + Z_2)^2} Z_1 \omega^2 A_i^2 = \frac{1}{2} \frac{Z_1^2 + 2Z_2 Z_1 + Z_2^2}{(Z_1 + Z_2)^2} Z_1 \omega^2 A_i^2 = I_i$$

**Coefficienti R e T** Da quanto appena ricavato è immediato definire i coefficienti che indicano quanto un'onda venga trasmessa e quanto venga riflessa.

**Definizione 2.5.1 (Coefficienti di trasmissione e riflessione).** Si definisce il coefficiente di trasmissione:

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_2 Z_1}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

e il coefficiente di riflessione:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

Dalla definizione segue immediatamente che  $T + R = 1$ .

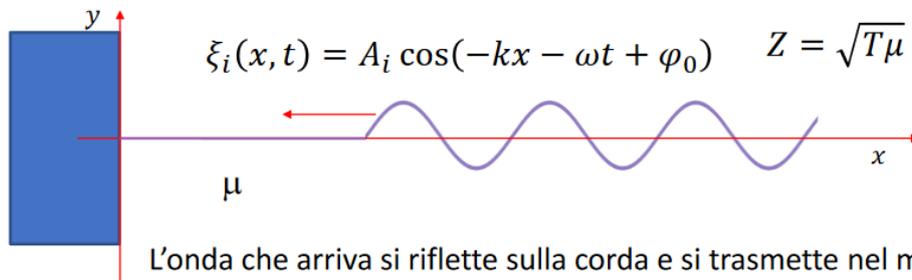
Vedi link Desmos per una bella simulazione: [onde riflesse e incidenti](#).

**Massima onda trasmessa** Si vede immediatamente che la massima onda trasmessa si ha per  $I_r = 0 \implies A_r = 0 \implies Z_1 = Z_2$ . La condizione  $Z_1 \approx Z_2$  è nota in fisica con il termine di *raccordo delle impedenze*. In generale è più semplice ottenere questo risultato con variazioni lente (non brusche come appena studiato) dei parametri della corda:

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu(x)}{dx} \ll \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \left( = k = \frac{2\pi}{\lambda}, \rightarrow \lambda \ll D \right)$$

## 2.6 Onde stazionarie

Studiamo una corda fissata a un estremo, che può essere pensato come una corda con  $\mu_0 \rightarrow \infty$ . Consideriamo un'onda regressiva proveniente dalla regione  $x > 0$ :



L'onda che arriva si riflette sulla corda e si trasmette nel muro

$$A_t = \frac{2Z}{Z+Z_0} A_i, \quad A_r = \frac{Z-Z_0}{Z+Z_0} A_i$$

Nel caso limite in cui  $Z_0 \gg Z$  abbiamo che  $A_t \rightarrow 0$ ,  $A_r = -A_i$ . L'onda riflessa è un'onda progressiva ribaltata rispetto all'onda incidente:

$$\xi_r(x, t) = -A_i \cos(kx - \omega t + \varphi_1)$$

L'onda incidente e quella riflessa hanno la stessa intensità, quindi complessivamente l'onda risultante ( $\xi(x, t) = \xi_i(x, t) + \xi_r(x, t)$ ) non trasporta energia. È detta *onda stazionaria*. Il punto  $x = 0$  è un vincolo per la corda, quindi

$$A_i [\cos(-\omega t + \varphi_0) - \cos(-\omega t + \varphi_1)] = 0 \iff \varphi_1 = \varphi_0$$

$$\xi(x, t) = A_i [\cos(-kx - \omega t + \varphi_0) - \cos(kx - \omega t + \varphi_0)]$$

Ricordando che  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha-\beta}{2} \right)$ , possiamo scrivere in un altro modo  $\xi(x, t)$ :

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{-kx-\omega t+\varphi_0+kx-\omega t+\varphi_0}{2} = -\omega t + \varphi_0$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{-kx-\omega t+\varphi_0-kx+\omega t-\varphi_0}{2} = -kx$$

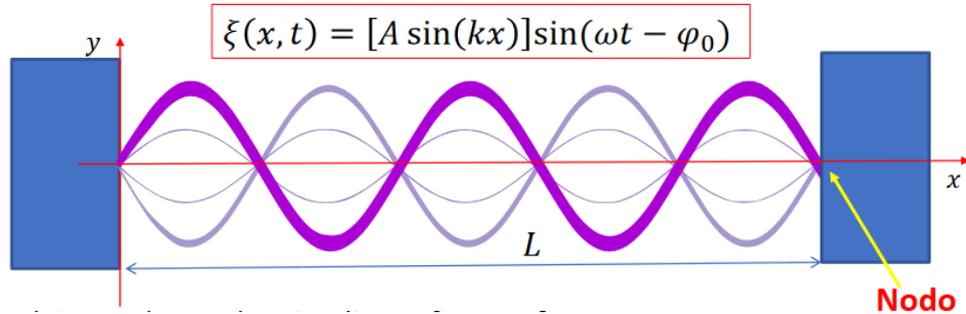
$$\xi(x, t) = -2A_i [\sin(-kx) \sin(-\omega t + \varphi_0)] =$$

$$\xi(x, t) = -2A_i \sin(kx) \sin(\omega t - \varphi_0) = A \sin(kx) \sin(\omega t - \varphi_0)$$

La formula appena ricavata può essere ricavata come segue: ogni punto della corda oscilla nel tempo con un'ampiezza massima data da  $A \sin(kx)$ . Esistono dei punti fissi (nodi) e dei punti dove l'oscillazione è massima (ventri):

- Nodo:  $\sin(kx) = 0 \implies kx = n\pi \rightsquigarrow x = \frac{n\pi}{k}$  con  $n$  intero
- Ventre:  $\sin(kx) = \pm 1 \implies kx = (n + \frac{1}{2})\pi \rightsquigarrow x = (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{k}$

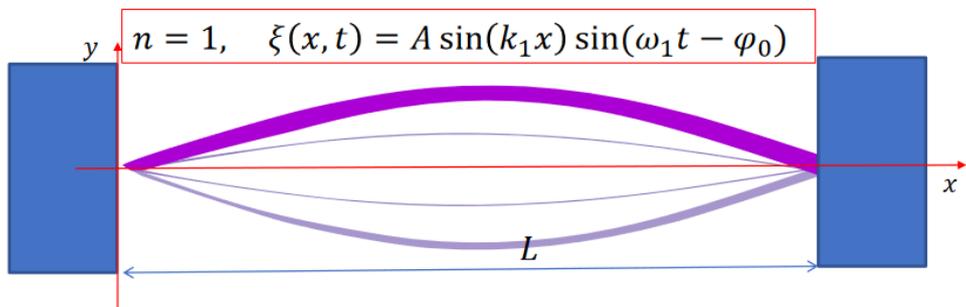
### 2.6.1 Corda vincolata a due estremi



La differenza con quanto fatto prima è che ora dobbiamo imporre due vincoli, in  $x = 0$  e in  $x = L$ , dove in ogni istante deve valere  $\xi(0, t) = \xi(L, t) = 0$ . Passiamo da  $k$  continui a  $k$  discreti:  $\xi(L, t) = 0 \rightsquigarrow \sin(kL) = 0 \rightsquigarrow k = n\pi/L$  con  $n$  intero. Stiamo *quantizzando* il numero d'onda (succederà anche in meccanica quantistica!), quindi saranno quantizzate anche le lunghezze d'onda, le pulsazioni e le frequenze:

$$k_n = n\pi/L, \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad \omega_n = vk_n = \frac{n\pi v}{L} = n\omega_1, \quad \nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n\frac{v}{2L} = n\nu_1$$

**Armonica fondamentale** L'onda armonica ottenuta ponendo  $n = 1$  è conosciuta come "armonica fondamentale".



$n$  corrisponde al numero di ventri. Sommando armoniche con  $n$  diverso si possono ottenere forme diverse, se invece compare solo un'armonica parliamo di "oscillazioni di modo normale". Le frequenze che si ottengono dalle oscillazioni di modo normale sono dette "frequenze proprie" o "autofrequenze". Qualunque onda che viaggia su una corda vincolata ai due estremi può essere espressa come combinazione lineare di armoniche fondamentali:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

**Una chitarra** Nella chitarra classica ci sono sei corde vincolate di diverso materiale: tipicamente tre sono di metallo e tre di nylon, avendo densità diverse permettono di coprire uno spettro più ampio di frequenze.

$$\nu_n = n\frac{v}{2L} = n\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Essendo la frequenza dipendente dalla tensione, accordare la chitarra significa trovare la tensione giusta della corda per suonare la nota corretta. Suonando poggio le dita sulla tastiera per accorciare la lunghezza della corda e suonare una nota diversa.

## Lezione 9: 21 marzo 2024

### 2.6.2 Analisi energetica

Consideriamo l'armonica n-esima:  $\xi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$ . È un'onda stazionaria di modo n tra 0 e L che rispetta le opportune condizioni iniziali e che ha energia cinetica e potenziale.

- Energia cinetica:  $u_K(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \omega_n^2 A_n^2 \sin^2(k_n x) \cos^2(\omega_n t)$ , è sempre nulla sui nodi (effettivamente non si muovono su y).
- Energia potenziale:  $u_P(x, t) = \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} T k_n^2 A_n^2 \cos^2(k_n x) \sin^2(\omega_n t)$ , è sempre nulla sui ventri.

La densità di energia meccanica si scrive quindi come:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \mu \omega_n^2 A_n^2 \sin^2(k_n x) \cos^2(\omega_n t) + \frac{1}{2} T k_n^2 A_n^2 \cos^2(k_n x) \sin^2(\omega_n t)$$

$u(x, t)$  non è costante, nè nel tempo nè nello spazio! Inoltre si nota che  $u_P$  e  $u_K$  sono sempre sfasati di  $\pi/2$ . Si può calcolare l'energia totale presente nella corda (ponendo  $m = L\mu$ ):

$$E = \int_0^L u(x, 0) dx = \frac{1}{2} \mu \omega_n^2 A_n^2 \int_0^L \sin^2(k_n x) dx = \frac{1}{2} \mu \omega_n^2 A_n^2 \frac{L}{2} = \frac{1}{4} m \omega_n^2 A_n^2$$

Non mi piace il fatto che compaia il fattore  $\frac{1}{4}$ : da dove viene? Quanto appena trovato viene dal fatto che avevamo posto  $A = 2A_i$ , quindi possiamo riscrivere l'energia come

$$E = \frac{1}{4} m \omega_n^2 A_n^2 = m \omega_n^2 A_i^2 = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A_i^2 + \frac{1}{2} m \omega_n^2 A_r^2$$

**Potenza e intensità** La potenza trasportata dall'onda è data da:

$$\mathcal{P}(x, t) = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -T k_n \omega_n A_n^2 \cos(k_n x) \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) \cos(\omega_n t)$$

Si nota immediatamente che  $\mathcal{P}(x, t) \propto \sin(2\omega_n t)$ , che ha media nulla! In questo caso  $\mathcal{P}(x, t) \neq v u(x, t)$  perché non ho un'onda progressiva. Di conseguenza non ha senso parlare di intensità, perché le onde stazionarie non trasportano energia:

$$I = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} \mathcal{P}(x, t) dt = \langle \mathcal{P} \rangle = 0 \quad \left( \neq \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2 \right)$$

**Esercizio.** Dimostrare che per un'onda regressiva, in cui vale  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial \xi}{\partial t}$ , si ha  $\mathcal{P}(x, t) = T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$ .

L'esercizio sopra è il motivo per cui non ha senso parlare di intensità per le onde stazionarie: i contributi di potenza di onda progressiva e regressiva si annullano! Per convenzione decidiamo allora che la potenza sarà sempre  $\mathcal{P}(x, t) = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$  e che il suo segno avrà un significato: positivo se l'onda è progressiva, negativo se è regressiva.

**Esercizio.** Dimostrare che per  $\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$  vale  $\mathcal{P}(\xi) = Z \frac{\partial f}{\partial t} - Z \frac{\partial g}{\partial t}$ .

### 2.6.3 Approfondimento: analisi di Fourier per onde stazionarie

Consideriamo come prima una corda vincolata in  $x = 0$  e  $x = L$  (si applica l'equazione (2.2)):

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nkx) \sin(n\omega t + \varphi_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nkx) [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

Devo capire come determinare i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$ . Supponiamo di conoscere forma e velocità della corda a  $t = 0$ :  $\xi(x, 0) = f(x)$ ,  $\dot{\xi}(x, 0) = g(x)$ . Impongo la condizione iniziale sulla forma ( $\sin(0) = 0$ ,  $\cos(0) = 1$ ) quindi restano solo i coefficienti  $a_n$ :

$$\xi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nkx) \equiv f(x) \quad (2.3)$$

Le definizioni già viste di ortonormalità delle funzioni valgono anche nello spazio delle coordinate, non solo in quello dei tempi:

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda} \cos(nkx) \cos(mkx) dx &= \frac{\lambda}{2} \delta_{nm}, & \int_0^{\lambda} \sin(nkx) \sin(mkx) dx &= \frac{\lambda}{2} \delta_{nm} \\ \int_0^{\lambda} \cos(nkx) \sin(mkx) dx &= 0 \\ \text{Con } \delta_{nm} &= 1 \text{ per } n = m, & \delta_{nm} &= 0 \text{ per } n \neq m \text{ (delta di Kronecker)} \end{aligned}$$

Quindi  $\cos(nkx)$  e  $\sin(nkx)$  costituiscono una base ortogonale per tutte le funzioni periodiche di  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  nello spazio. Tuttavia nessuna delle funzioni  $\cos(nkx)$  soddisfa i vincoli (perché  $\cos(0) = 1$ ), abbiamo trovato una base troppo grande per rappresentare il nostro problema! Le funzioni  $\sin(nkx)$  con  $k = \pi/L$  sono una base completa in  $[0, L]$  per cui vale:

$$\int_0^L \sin(nkx) \sin(mkx) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

Per trovare i coefficienti  $a_n$  posso moltiplicare entrambi i membri dell'equazione (2.3) per  $\sin(mkx)$  e integrare in  $[0, L]$ :

$$\int_0^L \left( \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nkx) \right) \sin(mkx) dx = \int_0^L f(x) \sin(mkx) dx$$

Da cui si ottiene che  $a_n = 2/L \int_0^L f(x) \sin(nkx) dx$  per le proprietà di ortonormalità descritte in precedenza. Dalla condizione sulla velocità si possono trovare i coefficienti  $b_n$ :

$$\dot{\xi}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nkx) [-n\omega a_n \sin(n\omega t) + n\omega b_n \cos(n\omega t)]$$

che al tempo 0 dev'essere

$$\dot{\xi}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega b_n \sin(nkx) \equiv g(x)$$

Come prima, moltiplico per  $\sin(mkx)$  e integro in  $[0, L]$ :

$$\int_0^L \left( \sum_{n=1}^{+\infty} b_n n\omega \sin(nkx) \right) \sin(mkx) dx = \int_0^L g(x) \sin(mkx) dx$$

Quanto appena fatto è l'equivalente di proiettare un vettore su una base, solo che è stato fatto per una funzione. Da qui, operando come prima, si giunge a

$$b_n = \frac{2}{n\omega L} \int_0^L g(x) \sin(nkx) dx$$

In merito a quanto appena fatto c'è un bel link Desmos che rappresenta l'esercizio sulla corda pizzicata: [corda pizzicata](#).

## Lezione 10: 26 marzo 2024

### 2.7 Onde sonore

Le onde sonore viaggiano in generale in tre dimensioni, oggi ci limiteremo al caso unidimensionale facendole viaggiare in un tubo. Le onde sulla corda sono trasversali rispetto alla direzione di propagazione dell'onda, esse hanno bisogno di qualcosa di solido per propagarsi perché sono necessari dei vincoli sulle posizioni dei punti. Nei liquidi e nei gas le onde trasversali non sono quindi possibili, mentre avvengono onde longitudinali (oscillazione nella stessa direzione del moto). Se ho una direzione di propagazione ben precisa le onde sono trattabili a tutti gli effetti come onde scalari.

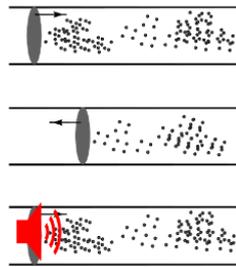
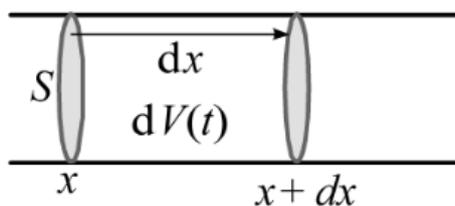
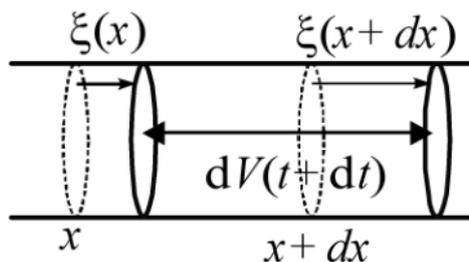


Figura 2.7: Tubo riempito di gas e membrana che possa comprimere o decomprimere il gas. La membrana può essere immaginata come un semplice speaker.

L'attivazione del pistoncino provoca variazioni di pressione e quindi di densità del gas. Pongo un sistema di riferimento con  $x = 0$  sulla membrana e studio il comportamento del tubo.



Mi limito a una zona del tubo  $[x, x+dx]$  limitata da due diaframmi senza massa e mobili. La massa  $dm$  del gas occupa nel tempo volumi diversi, ma è una costante. Inizialmente  $dm = \rho_0 D dx$ . Successivamente il gas viene compresso e i due diaframmi si muovono.



Quindi ho che

$$\begin{aligned} dV(t) &= S[dx + \xi(x + dx) - \xi(x)] = Sdx \left[ 1 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \right] \\ dm = \text{cost.} &\implies \rho_0 Sdx = \rho Sdx \left[ 1 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \right] \\ &\rightsquigarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x} \end{aligned}$$

Ora posso espandere per piccole perturbazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} &= \left[ 1 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \right]^{-1} \approx 1 - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \\ &\rightsquigarrow \rho(x, t) - \rho_0 = -\rho_0 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \end{aligned}$$

Studiamo la dinamica del volumetto sull'asse  $x$ .  $a_x = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ . Sia  $p(x)$  la pressione.

$$F_x = p(x)S - p(x + dx)S$$

Proseguendo con i calcoli si ottiene che

$$\begin{aligned} \frac{f_x(x)}{p(x)S} - \frac{f_x(x+dx)}{p(x+dx)S} &= \frac{dm}{(\rho_0 S dx)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ \implies -S \frac{\partial p}{\partial x} dx &\approx \rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ \implies \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Ho collegato una variazione del gas (pressione) a una variazione del mio volumetto. Quindi le onde sonore cambiano la pressione  $p(x)$  e la densità  $\rho(x)$ . Adesso studio la variazione di  $p(\rho)$  in prossimità della condizione di equilibrio ( $P_0 = p(\rho_0), \rho_0$ ):

$$p(\rho) \approx P_0 + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) = P_0 + \frac{\beta}{\rho_0} (\rho - \rho_0) = P_0 - \beta \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x$$

Devo capire quanto vale  $\beta/\rho_0$ . Possiamo assumere che il gas faccia una trasformazione adiabatica, perché le trasformazioni che comportano un passaggio di calore sono molto lente e le onde sonore sono invece molto veloci. Grazie a questa considerazione possiamo scrivere  $p(\rho) = \alpha \rho^\gamma$ .

$$\begin{aligned} \beta &= \rho_0 \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \rho_0 \gamma \alpha \rho_0^{\gamma-1} = \gamma \alpha \rho_0^\gamma = \gamma P_0 \\ p(x) &= P_0 - \beta \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \rightsquigarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\beta \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x \end{aligned}$$

Da cui si ottiene un'equazione di D'Alembert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = -\beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \beta = \gamma P_0 \\ -\beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \implies \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\beta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \implies \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}}$$

Le soluzioni sono le stesse di quelle viste sulla corda! In particolare, avremo onde regressive e progressive.

**Esempio.** Verifichiamo la previsione teorica della velocità del suono considerando l'aria secca a livello del mare:  $P_0 = 1.015 \times 10^5 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 1.29 \text{kg/m}^3$ .  $\gamma$  è praticamente  $7/5$  perché l'aria è principalmente un gas biatomico (azoto e ossigeno).

$$v_{teo} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = 331 \text{m/s} \qquad v_{mis} = 330 \text{m/s}$$

C'è un accordo entro il 3 per mille! Significa che le approssimazioni che abbiamo fatto sono valide e funzionano molto bene. In acqua la velocità è di circa 1400m/s, nel granito è circa 6000m/s.

**Cosa sono le onde sonore?** Sono onde di spostamento della posizione delle molecole  $\xi(x, t)$ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Ma sono anche onde di densità  $\rho(x, t)$ :

$$\rho(x, t) = \rho_0 - \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \rightsquigarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

E anche onde di pressione  $p(x, t)$ :

$$p(x, t) = P_0 - \gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \rightsquigarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

### 2.7.1 Analisi energetica delle onde sonore

Il diaframma applica una forza sul gas data da  $F_x = Sp(x, t)$ , quindi il suo lavoro risulta  $\delta L = F_x dx = Sp(x, t) \dot{\xi}(x, t) dt$ , quindi

$$\delta L = Sp(x, t) \dot{\xi}(x, t) dt = SP_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} dt - S\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} dt$$

Dividendo per il tempo otteniamo la potenza:

$$\mathcal{P} = \frac{\delta L}{dt} = SP_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} - S\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Il primo termine ha media nulla perché la media dello spostamento spaziale nel tempo è nulla, quindi il primo termine non è un'energia associata all'onda perché non viaggia. L'unico termine che ci interessa è il secondo, che rappresenta l'energia effettivamente immessa nel tubo e che ha la possibilità di propagarsi:

$$\mathcal{P} = -S\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

È proporzionale alla sezione del tubo, questo ci torna comodo perché in generale quando parliamo di intensità vogliamo una quantità definita punto per punto e non su una superficie. Quindi definisco l'intensità delle onde sonore.

**Definizione 2.7.1 (Intensità di onda sonora).** Si definisce intensità di onda sonora:

$$I = \left\langle \frac{\mathcal{P}}{S} \right\rangle = \left\langle -\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle$$

È una quantità puntuale e si misura in  $\text{W}/\text{m}^2$ .

Per le onde progressive la derivata spaziale è proporzionale alla derivata temporale, quindi posso scrivere

$$I = \left\langle \frac{\gamma P_0}{v} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle = \left\langle v \gamma P_0 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right\rangle$$

**Definizione 2.7.2 (Impedenza acustica specifica).** Si definisce l'impedenza acustica specifica:

$$Z = \frac{\gamma P_0}{v} = \sqrt{\gamma P_0 \rho_0} = \rho_0 v$$

Utilizzando l'impedenza appena definita si scrive che

$$I = \left\langle Z \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle,$$

che ha una forma identica a quella che compariva sulla corda (Definizione 2.4.3), ma con diverse unità di misura!

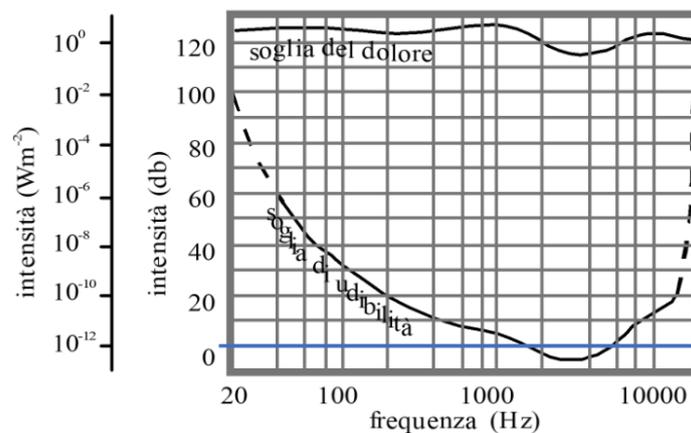
**Impedenza come causa-effetto** Avevamo già detto che l'impedenza compariva come costante di proporzionalità fra una causa e il suo effetto. Cerchiamo una relazione di questo tipo in questo caso. Ricordiamo che

$$p(x, t) = P_0 - \gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\delta p = -\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\gamma P_0}{v} \frac{\partial \xi}{\partial t} = Z \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

dove la variazione di pressione è la causa dello spostamento del gas.

**Come udiamo il suono** Il nostro timpano si comporta esattamente come un oscillatore armonico forzato all'arrivo di un'onda sonora. Possiamo immaginarlo come un oscillatore con un fattore di qualità molto piccolo, perché il timpano è sensibile a frequenze fra 20Hz e 20000Hz. La massima sensibilità è attorno ai 2 – 3kHz, le frequenze della voce stanno fra i 20Hz e i 4kHz. L'intensità minima percepibile è  $I_0 = 10^{-12} \text{W}/\text{m}^2$  e la soglia del dolore è convenzionalmente definita come  $I_{dol} = 1 \text{W}/\text{m}^2$ . L'intensità massima, che provoca un immediato danno meccanico all'orecchio, è  $I_{max} = 10 \text{W}/\text{m}^2$ . Questi valori sono convenzionalmente assegnati perché poi in realtà variano in base alla frequenza del suono e da persona a persona.



L'intervallo di intensità sonora in cui l'orecchio umano è sensibile è enorme: tredici ordini di grandezza! Per questo motivo è più comodo studiarla in scala logaritmica, definendo il livello sonoro in deciBel:

$$\beta_s = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) \text{ dB}$$

Di conseguenza, il limite di udibilità è  $\beta_s = 0 \text{ dB}$ , la soglia del dolore  $\beta_s = 120 \text{ dB}$  e il danno permanente immediato a  $\beta_s = 130 \text{ dB}$ .

**Giustificazione delle approssimazioni** Calcoliamo l'intensità e l'ampiezza delle oscillazioni delle molecole d'aria con un suono armonico di frequenza  $f = 1\text{kHz}$ , livello sonoro  $\beta_s = 50\text{dB}$  e in aria standard (dove  $P_0 = 1.015 \times 10^5 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 1.29 \text{kg/m}^3$ ,  $\gamma = 7/5$ ):

$$\beta_s = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta_s/10} \rightarrow I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{50}{10}} \text{W/m}^2$$

$$\rightarrow I = 10^{-7} \text{W/m}^2$$

$$I = \left\langle \frac{p}{s} \right\rangle = \left\langle Z \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2 \rightarrow A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{Z}} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{2I}{Z}}$$

$$Z = \sqrt{\gamma P_0 \rho_0} = 427 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$$

$$A = 3,4 \cdot 10^{-9} \text{m} = 3,4 \text{nm}$$

$$A \approx 50 \text{ diametri atomici} \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{330 \text{ m/s}}{1000 \text{ Hz}} = 33 \text{ cm}$$

Si nota che l'ampiezza delle oscillazioni è molto inferiore rispetto alla lunghezza d'onda del suono. Si nota lo stesso fatto anche per le variazioni di densità e di pressione:

$$\rho(x, t) = \rho_0 - \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{\rho(x, t)}{\rho_0} = 1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \rightarrow \frac{\delta \rho}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$p(x, t) = P_0 - \gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{p(x, t)}{P_0} = 1 - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \rightarrow \frac{\delta P}{P_0} = -\gamma \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\text{Da } \xi(t) = A \cos(2\pi f t) \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \xi}{\partial t} \rightarrow \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\text{max}} = A \frac{2\pi f}{v} = 6,3 \cdot 10^{-8}$$

$$\left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)_{\text{max}} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\text{max}} = A \frac{2\pi f}{v} = 6,3 \cdot 10^{-8}$$

$$\left( \frac{\delta p}{P_0} \right)_{\text{max}} = \gamma \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\text{max}} = \gamma A \frac{2\pi f}{v} = 8,8 \cdot 10^{-8}$$

Piccole perturbazioni rispetto ai valori di equilibrio!

Essendo tutte variazioni molto piccole, le equazioni di D'Alembert sono quelle *corrette* per le onde sonore, pur avendo applicato alcune approssimazioni al nostro modello. Questo significa che tutte le onde viaggiano alla stessa velocità (per fortuna, altrimenti sentiremmo la musica diversamente a seconda della distanza dalla sorgente!).

## Lezione 11: 3 aprile 2024

### 2.8 Interferenza e battimenti

Quando si parla di interferenza e di battimenti si utilizza la sovrapposizione di onde e quindi la linearità dell'equazione di D'Alembert. Utilizziamo onde armoniche perché tanto ogni onda periodica può essere scritta come sovrapposizione di onde armoniche e impulsi non periodici verranno comunque trattati tramite una trasformata di Fourier.

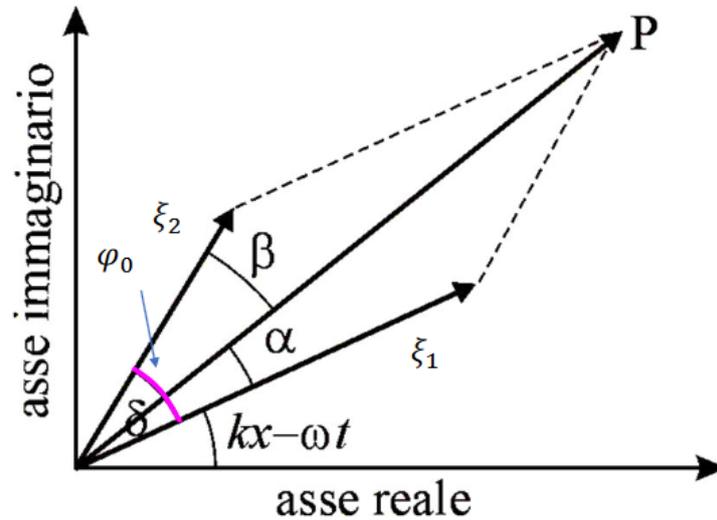
#### 2.8.1 Interferenza

Per avere interferenze è necessario avere onde coerenti (per ora le consideriamo come onde sonore in un tubo), ovvero con la stessa identica pulsazione  $\omega$ :

$$\xi_1(x, t) = A_1 \cos(kx - \omega t)$$

$$\xi_2(x, t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

Passando nel piano complesso otteniamo che  $\xi_1(x, t) = \text{Re}[A_1 e^{i(kx - \omega t)}]$  e  $\xi_2(x, t) = \text{Re}[A_2 e^{i(kx - \omega t + \varphi_0)}]$ . L'onda che si propaga è  $\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t)$ .



Il punto P rappresenta il vettore  $\xi(x,t)$ . Riscriviamo la funzione che descrive la posizione del punto P:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(x,t) &= A_1 e^{i(kx-\omega t)} + A_2 e^{i(kx-\omega t+\varphi_0)} = \\ &= (A_1 + A_2 e^{i\varphi_0}) e^{i(kx-\omega t)} = A e^{i\alpha} e^{i(kx-\omega t)}\end{aligned}$$

Dove

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_0}$$

A seconda del valore di  $\varphi_0$  si possono presentare diversi casi:

**Ampiezza massima** per  $\varphi_0 = 0 \rightsquigarrow A = |A_1 + A_2|$ , è detta *interferenza costruttiva*.

**Ampiezza minima** per  $\varphi_0 = \pi \rightsquigarrow A = |A_1 - A_2|$ , è detta *interferenza distruttiva*. In particolare, se  $A_1 = A_2$  e  $\varphi_0 = \pi$ , allora  $A = 0$ , ossia non ci sono onde!

Il termine  $2A_1A_2 \cos \varphi_0$  è detto termine di interferenza.

**Intensità** Ricordando che  $I_1 = 1/2Z\omega^2 A_1^2$  e  $I_2 = 1/2Z\omega^2 A_2^2$ ,

$$I = \frac{1}{2}Z\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}Z\omega^2 (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_0) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi_0$$

Se le due onde hanno la stessa intensità  $I_1 = I_2 = I_0$ , allora

$$I = 2I_0 + 2I_0 \cos \varphi_0 = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

Se le onde sono in fase (interferenza costruttiva), ottengo che l'intensità risultante è quattro volte l'intensità di partenza:  $\varphi_0 = 0$ ,  $I = 4I_0$ . Se le onde sono invece in contro-fase (interferenza distruttiva), l'intensità risultante è nulla:  $\varphi_0 = \pi$ ,  $I = 0$ .

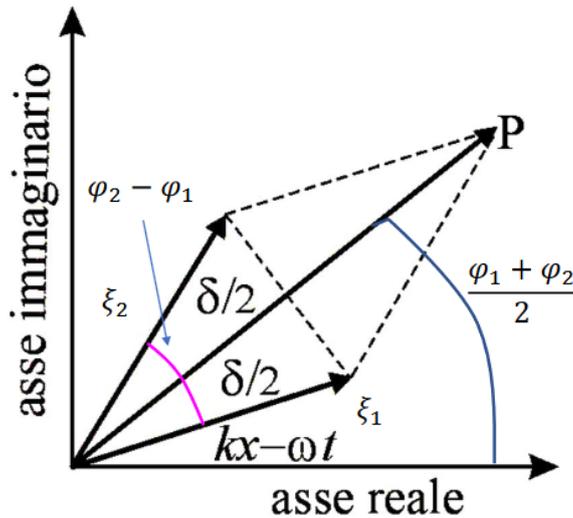
**Nota.** Si sommano le onde complesse, ma non le ampiezze nè le intensità! Per la serie di Fourier avevamo visto che le intensità di onde a periodicità diversa si sommano, ma qui abbiamo la somma di due onde che occupano lo stesso "posto" nella serie di Fourier.

### 2.8.2 Battimenti

Consideriamo in questo caso due onde sonore armoniche con la stessa ampiezza (per semplicità, non è necessario) e pulsazioni simili  $\omega_1 \approx \omega_2$ . Non siamo nel caso dell'interferenza perché le due pulsazioni non sono identiche. Viaggiando nello stesso mezzo, avremo anche che  $k_1 \approx k_2$ .

$$\xi_1(x,t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) \qquad \xi_2(x,t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Pongo  $\varphi_1 = k_1x - \omega_1t$  e  $\varphi_2 = k_2x - \omega_2t$ . Passiamo immediatamente nel campo complesso:  $\tilde{\xi}(x, t) = A(e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2})$ .



Dalla figura si intuisce che  $A_{tot} = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$  e che la fase  $\varphi_{tot} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ . Quindi, la funzione d'onda diventa:

$$\xi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

La somma non è un'onda armonica, perché entrambi i coseni dipendono dal tempo! Per comodità pongo  $\Delta k = (k_2 - k_1) / 2$ ,  $\Delta \omega = (\omega_2 - \omega_1) / 2$ ,  $k_0 = (k_2 + k_1) / 1$ ,  $\omega_0 = (\omega_2 + \omega_1) / 2$ , da cui:

$$\xi(x, t) = 2A \cos(\Delta kx - \Delta \omega t) \cos(k_0x - \omega_0 t)$$

Resta un'onda progressiva perché è un modo un po' più complicato di scrivere una dipendenza da  $x - vt$ . I due coseni hanno periodi di oscillazione diversi:  $\tau = 2\pi / \Delta \omega$ ,  $T_0 = 2\pi / \omega_0$ , ma  $\omega_0 \gg \Delta \omega$ , quindi  $\tau \gg T_0$ . I due termini hanno dei nomi precisi:

**Onda portante**  $\cos(k_0x - \omega_0 t)$ , velocemente variabile.

**Onda modulante**  $2A \cos(\Delta kx - \Delta \omega t)$ , lentamente variabile.

$\omega_b = \omega_2 - \omega_1$ ,  $\nu_b = \nu_2 - \nu_1$  sono detti pulsazione e frequenza di battimento rispettivamente.  $\omega_b = 2\Delta \omega$  perché vi sono due massimi del battimento in un periodo di oscillazione dell'onda modulante. Il segno non conta perché tanto c'è la portante che fa oscillare velocemente fra  $-A_{mod}$  e  $+A_{mod}$ . Ma cosa sta succedendo?

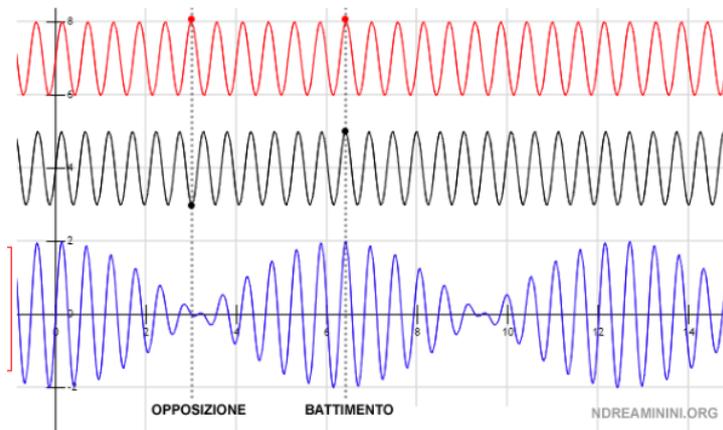


Figura 2.8: Le onde rossa e nera sono le onde di partenza, l'onda blu è la somma delle due. Questo si può vedere molto bene usando un programma come Audacity.

Le fasi si muovono con velocità di fase  $v_f = \omega_0 / k_0$ , mentre i massimi dell'involucro si muovono con velocità di gruppo  $v_g = \Delta\omega / \Delta k$ . Nei mezzi non dispersivi si ha che  $\omega(k) = vk$ , quindi  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v = v_f$ . Al contrario, nei mezzi dispersivi  $\omega(k) = kv(k)$ , quindi  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v(k) + k \frac{dv}{dk}(k) \neq v_f$ . Sperimentalmente si verifica spesso  $v_g < v_f$ , questo fenomeno è detto "dispersione normale". Nella trasmissione di segnali l'informazione viaggia con una velocità pari a  $v_g$ , ovvero la velocità della modulazione e non della portante.

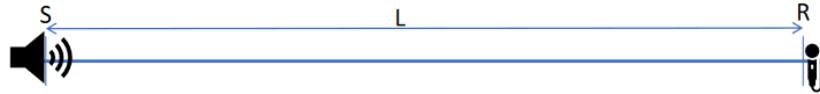
**Nota.** Non abbiamo utilizzato alcuna proprietà specifica delle onde sonore, questi fenomeni avvengono con ogni tipo di onda!

## 2.9 Effetto Doppler

L'effetto Doppler (classico) consiste nel cambiamento della frequenza dei suoni percepiti quando vi è moto relativo tra la sorgente e chi riceve le onde sonore. Un esempio è la sirena delle ambulanze. Chiameremo S la sorgente e R il ricevitore. I moti sono sempre valutati rispetto al sistema di riferimento in cui il mezzo è a riposo. Valutiamo i seguenti quattro casi:

1. S e R fermi rispetto al mezzo.
2. S in moto rispetto al mezzo, R fermo.
3. R in moto, S fermo.
4. Sia S che R in moto rispetto al mezzo.

Immaginiamo che la sorgente invii un segnale semplice con una periodicità  $T_p$ . Allora i suoni saranno emessi ai tempi  $t_{1s} = 0$ ,  $t_{2s} = T_p$ ,  $t_{3s} = 2T_p$ .

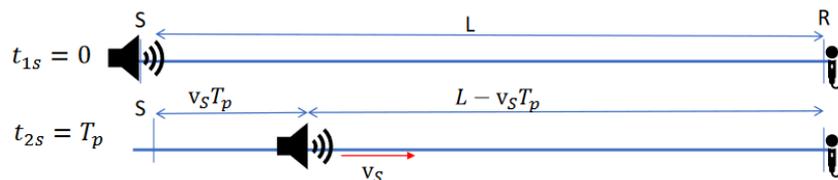


**Caso 1: S e R fermi** Se  $v_m$  è la velocità delle onde nel mezzo e  $L$  è la distanza fra S e R, allora i tempi di arrivo saranno:

$$t_{1R} = \frac{L}{v_m}, \quad t_{2R} = T_p + \frac{L}{v_m}, \quad t_{3R} = 2T_p + \frac{L}{v_m} \dots$$

Quindi la differenza di tempo d'arrivo fra due segnali è sempre  $T_p$ , il che rende la frequenza sentita dal ricevitore identica alla frequenza emessa dalla sorgente.

**Caso 2: S in moto, R fermo** Consideriamo la sorgente in moto con velocità  $v_s$  in avvicinamento al ricevitore.



Il tempo di ricezione del primo segnale è  $t_{1R} = L / v_m$ , mentre il tempo di ricezione del secondo segnale è

$$t_{2R} = T_p + \frac{L - v_s T_p}{v_m} = T_p \left( 1 - \frac{v_s}{v_m} \right) + \frac{L}{v_m}$$

Quindi l'intervallo dei segnali al ricevitore è

$$t_{2R} - t_{1R} = T_p \left( 1 - \frac{v_s}{v_m} \right) < T_p$$

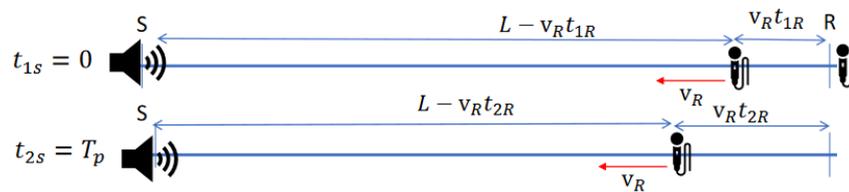
La frequenza percepita dal ricevitore aumenta!

$$f_R = \frac{1}{T_p \left( 1 - \frac{v_s}{v_m} \right)} = \frac{f_S}{1 - \frac{v_s}{v_m}} > f_S$$

Se vogliamo studiare il caso in cui la sorgente si allontana dal ricevitore, è sufficiente cambiare segno alla velocità  $v_s$ . Si ottiene che

$$f_R = \frac{1}{T_p \left( 1 + \frac{v_s}{v_m} \right)} = \frac{f_S}{1 + \frac{v_s}{v_m}} < f_S$$

**Caso 3: S ferma, R in moto** Il ricevitore è in moto a velocità  $v_R$  in avvicinamento alla sorgente.



Il primo segnale è emesso quando R dista  $L$  da S. Nel tempo di propagazione il ricevitore si è spostato di uno spazio pari a  $v_R t_{1R}$ , quindi il segnale ha percorso uno spazio pari a  $L - v_R t_{1R}$ . Si ottiene che

$$t_{1R} = \frac{L - v_R t_{1R}}{v_m} \rightsquigarrow t_{1R} = \frac{L}{v_m} \frac{1}{1 + \frac{v_R}{v_m}}$$

Con un ragionamento analogo si ottiene che

$$t_{nR} = nT_p + \frac{L - v_R t_{2R}}{v_m} \rightsquigarrow t_{nR} = \frac{L}{v_m} \frac{1}{1 + v_R/v_m} + \frac{nT_p}{1 + v_R/v_m}$$

Quindi l'intervallo fra i segnali ricevuti è

$$t_{2R} - t_{1R} = T_p \frac{1}{\left( 1 + \frac{v_R}{v_m} \right)} < T_p$$

Che ci permette di calcolare la frequenza percepita dal ricevitore:

$$f_R = \frac{1 + \frac{v_R}{v_m}}{T_p} = f_S \left( 1 + \frac{v_R}{v_m} \right) > f_S$$

Come nel caso 2, si può cambiare il segno della velocità  $v_R$  per studiare il caso in allontanamento:

$$f_R = \frac{1 - \frac{v_R}{v_m}}{T_p} = f_S \left( 1 - \frac{v_R}{v_m} \right) < f_S$$

**Caso 4: S ed R in moto** Qui andiamo di ragionamento. Consideriamo il caso in cui S ed R sono entrambe in avvicinamento (per semplicità). Se la sorgente è in moto, le onde nel mezzo hanno una frequenza

$$f_m = \frac{f_s}{1 - v_S/v_m}$$

come nel secondo caso, perché avevamo studiato un osservatore fermo, ossia solidale con il mezzo. Poiché il ricevitore è in moto le onde vengono ricevute con un'altra frequenza:

$$f_R = f_m \left(1 + \frac{v_R}{v_m}\right) = f_S \frac{1 + \frac{v_R}{v_m}}{1 - \frac{v_S}{v_m}}$$

Con ragionamenti simili a prima si ottiene la frequenza percepita dal ricevitore con altre combinazioni di velocità relative al mezzo.

**Nota.** Quanto fatto vale per qualunque onda meccanica con velocità dirette lungo la congiungente fra sorgente e ricevitore.

# Capitolo 3

## Onde tridimensionali

### Lezione 12: 4 aprile 2024

Per ora abbiamo lavorato sempre con onde unidimensionali  $\xi(x, t)$ , per i mezzi non dispersivi l'equazione di riferimento è l'equazione di D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

dove  $v$  rappresenta la velocità dell'onda (che per le onde armoniche è uguale alla velocità di fase e anche alla velocità di gruppo). Per estendere la trattazione allo spazio tridimensionale dovremo passare da due a quattro variabili:  $(x, y, z, t)$  o  $(\mathbf{r}, t)$ .

### 3.1 Equazione di D'Alembert tridimensionale

Procederemo per maniera euristica. Ricordiamo il significato dei termini nell'equazione (3.1): il membro di sinistra rappresenta una differenza di tensioni ai lati dell'elemento infinitesimo di corda, mentre il membro di destra rappresenta l'accelerazione verticale della corda. È naturale provare a modificare il membro di sinistra per poter tenere conto di tutte le direzioni da cui possono provenire le forze:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

che può essere riscritta semplicemente utilizzando il laplaciano:

$$\nabla^2 \xi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

Questa equazione ha diverse proprietà già viste per l'equazione in una dimensione:

- È omogenea, quindi la soluzione banale è sempre presente:  $\xi(\mathbf{r}, t) = 0$ .
- È lineare ed è associata a un operatore molto importante: l'operatore di D'Alembert o *d'Alembertiano*

$$\hat{L} = \left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \rightarrow \hat{L}(\xi(\mathbf{r}, t)) = 0$$

L'equazione appena scritta può essere rappresentata più semplicemente con  $\square \xi(\mathbf{r}, t) = 0$ .

- Vale il principio di sovrapposizione.

Si nota immediatamente che il caso unidimensionale è un caso limite dell'equazione (3.2) in cui  $\xi(\mathbf{r}, t)$  dipende esclusivamente da  $x$ . L'unica differenza è che in questo caso l'onda è definita in tutto lo spazio e non solo sull'asse  $x$ .

**Soluzioni dell'equazione** Al contrario del caso unidimensionale, in tre dimensioni abbiamo due soluzioni (una per ciascun verso di propagazione) per ogni direzione disponibile dello spazio. In altre parole,  $\forall \hat{\mathbf{u}}, \forall f, g \in \mathcal{C}^2$ ,  $\xi(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - vt)$  e  $\xi(\mathbf{r}, t) = g(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} + vt)$  sono soluzioni.

**Dimostrazione.** Poniamo  $s = \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - vt$ ,  $\xi(\mathbf{r}, t) = f(s)$ .

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = u_x f' \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = u_x \frac{\partial f'}{\partial x} = u_x \frac{df'}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = u_x^2 f''$$

Di conseguenza,  $\nabla^2 \xi$  diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= u_x^2 f'' + u_y^2 f'' + u_z^2 f'' \\ &= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) f'' = f'' \end{aligned}$$

E come nel caso unidimensionale,

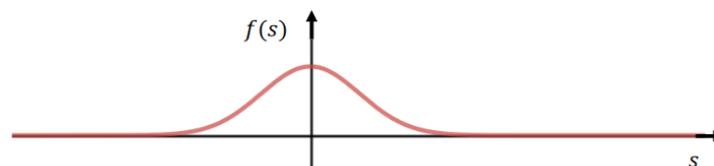
$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} v^2 f'' = f''$$

L'unico aspetto che conta ai fini della dimostrazione è che  $f''$  esista! Quindi  $f(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - vt)$  è una soluzione dell'equazione di D'Alembert. Più precisamente è un'onda progressiva nella direzione e verso individuata da  $\hat{\mathbf{u}}$ . ■

**Cerchiamo il conforto del passato** Quando  $\hat{\mathbf{u}} \equiv \hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} = x \rightsquigarrow \xi(\mathbf{r}, t) = f(x - vt) = \xi(x, t)$ , che è l'onda progressiva in una dimensione già conosciuta ma che si muove nella direzione delle  $x$  positive, con la differenza, come detto prima, che questa volta l'onda occupa tutto lo spazio.

**Struttura delle onde** Consideriamo per ora onde con  $u_z = 0$ ,  $\hat{\mathbf{u}} \equiv u_x \hat{\mathbf{i}} + u_y \hat{\mathbf{j}} \rightsquigarrow \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}$ . Consideriamo un'onda impulsiva con un solo massimo in  $s = 0$ .

e.g.:  $f(s) = Ae^{-\alpha s^2}$



Studiamo il moto del massimo dell'onda:  $s = xu_x + yu_y - vt = 0 \rightsquigarrow xu_x + yu_y = vt$ .

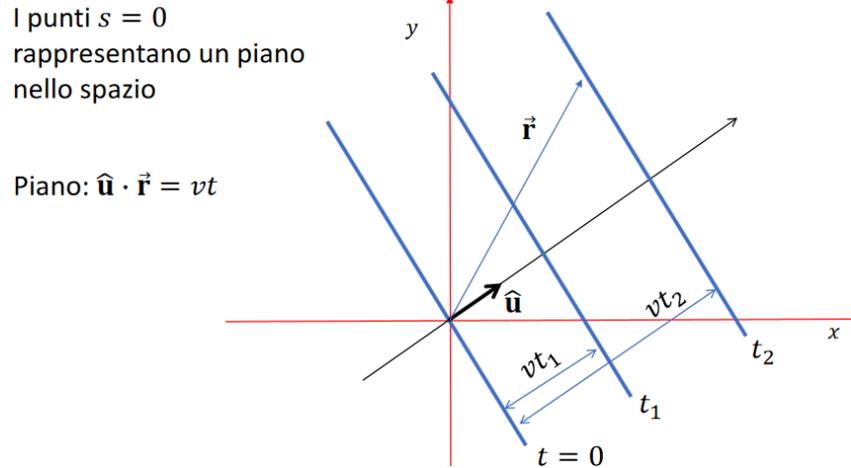


Figura 3.1: La retta blu va immaginata come un piano in tre dimensioni perpendicolare alla direzione individuata dal versore  $\hat{\mathbf{u}}$  che si muove con velocità  $v$ .

Queste onde sono dette onde piane, sembra che serva un piano infinito per generarle! In realtà sono generalmente impiegate come approssimazione di onde reali che altrimenti non sarebbero piane (quindi in una zona piccola lontana dalla sorgente).

**Definizione 3.1.1 (Fronte d'onda).** Il luogo dei punti di uguale ampiezza è detto fronte d'onda ed è rappresentabile come un piano che trasla.

**Onde armoniche piane** Nel caso tridimensionale un'onda armonica può essere scritta come  $\xi(\mathbf{r}, t) = A \cos(k\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ . Questa è detta onda armonica piana.

**Definizione 3.1.2 (Vettore d'onda).**

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{u}}$$

$\mathbf{k}$  individua la direzione di moto dell'onda e il suo modulo è il numero d'onda  $k$ .  $\mathbf{k}$  è quindi perpendicolare ai fronti d'onda.

Grazie al principio di sovrapposizione possiamo applicare un ragionamento simile alla serie di Fourier anche per le onde piane in tre dimensioni. Ponendo  $\xi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = A_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t + \varphi_k)$ , una soluzione generica sarà data da

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t + \varphi_k)$$

dove la sommatoria vale su un insieme discreto di valori di  $\mathbf{k}$ ,  $\omega_k = v|\mathbf{k}| = vk$ .

## Lezione 13: 9 aprile 2024

### 3.2 Onde sferiche

Spesso può essere utile cambiare rappresentazione del problema per coglierne la simmetria. Ad esempio, un'onda che parte da un punto e si sviluppa nello spazio tridimensionale sarà simmetrica rispetto all'origine. Vicino alla sorgente la rappresentazione di onda piana non va più bene. Proviamo con le coordinate polari sferiche:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

I versori sono convenzionalmente diretti nel verso in cui varia il versore aumentando la coordinata di riferimento (ad esempio: il versore  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  ha sempre componente  $z$  negativa, perché aumentare  $\theta$  porta il

punto "in giù"). In coordinate sferiche dobbiamo tenere conto di come varia il laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

Questo risultato si può ottenere facilmente con i coefficienti di Lamè. Di conseguenza si può riscrivere l'equazione di D'Alembert con le nuove coordinate:

$$\nabla^2 \xi(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(r, \theta, \varphi, t)}{\partial t^2}$$

### 3.2.1 Soluzione delle onde sferiche

Si può mostrare che esistono soluzioni generiche di questo tipo:

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(r, \theta, \varphi, t) = \frac{f(r \mp vt)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi) \tag{3.3}$$

$\forall f \in \mathcal{C}^2$  e per particolari funzioni  $Y_l^m \in \mathcal{C}^2$  infinite ma numerabili, gli indici sono  $l = 0, 1, \dots, \infty$ ;  $m = -l, \dots, 0, \dots, +l$  (WOW! In futuro rappresenteranno gli orbitali). Queste funzioni soddisfano equazioni del tipo:

$$\left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y_l^m(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Le  $Y_l^m$  sono dette *armoniche sferiche*.

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_{l,m}(\theta) e^{im\varphi} \quad \begin{aligned} P_{0,0}(\theta) &= 1, & P_{1,0}(\theta) &= \cos \theta, & P_{1,1}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \\ P_{2,0}(\theta) &= \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}, & P_{2,1}(\theta) &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta, \\ Y_l^{-m}(\theta, \varphi) &= (-1)^m (Y_l^m(\theta, \varphi))^* & P_{2,2}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{8}} \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

**Nota.** È molto importante notare che le soluzioni nell'equazione (3.3) sono esatte solo nel caso di  $l = 0$ , mentre negli altri casi valgono nel limite  $r \rightarrow +\infty$ . Si vede inserendole nell'equazione di D'Alembert.

Noi generalmente guarderemo le armoniche sferiche con  $l = 0, 1$ . Le funzioni sono ortonormali sulla superficie della sfera (nello spazio delle funzioni definite su  $(\theta, \varphi)$ ). Guardiamo ora i casi che si possono presentare per il termine dipendente da  $r \mp vt$ .

- $\frac{f(r-vt)}{r}$  rappresenta un'onda sferica uscente dall'origine;
- $\frac{f(r+vt)}{r}$  rappresenta un'onda sferica che va verso l'origine.

Dimostriamo che  $\xi(r, \theta, \varphi, t) = \frac{f(r-vt)}{r}$  è una soluzione dell'equazione di D'Alembert (abbiamo scelto  $Y_0^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ ):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \xi(r, \theta, \varphi, t) &= \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] \frac{f(r-vt)}{r} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{d}{dr} \frac{f}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r f' - f) = \frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{r} - \frac{f'}{r^2} = \frac{f''}{r} \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(r, \theta, \varphi, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{v^2} (-v)^2 \frac{f''}{r} = \frac{f''}{r} \end{aligned}$$

Le onde sferiche con  $f(r - vt) = A \cos(kr - \omega t + \alpha)$  sono dette *onde armoniche sferiche*:

$$\xi(r, \theta, \varphi, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t + \alpha) Y_m^l(\theta, \varphi)$$

Si nota che le onde sferiche possono avere una periodicità temporale (nel caso di onde armoniche ce l'hanno, in altri casi potrebbero non averla!) con periodo  $T_p = \frac{2\pi}{\omega}$ , ma non c'è periodicità spaziale per la presenza del fattore  $1/r$ . Questa può essere tuttavia chiamata "pseudo-periodicità" spaziale con lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi/k$ .

**Significato fisico del fattore  $1/r$**  Il fattore  $1/r$  è finora solo un fatto matematico, tuttavia si può comprendere il suo significato fisico attraverso l'energia.

**Nota.** Ricorda che valeva:

$$\begin{array}{ll} \text{Nella corda} & I = \frac{E(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \mathcal{P}(x, t) dt = \langle \mathcal{P} \rangle = \left\langle Z \left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right\rangle \\ \text{Nelle onde sonore} & I = \left\langle \frac{\mathcal{P}}{S} \right\rangle = \left\langle Z \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle \quad \text{Con } S \text{ sezione del tubo (costante)} \end{array}$$

Per le onde armoniche era  $I = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2$ .

Nel caso di onde sferiche la potenza a distanza  $r$  si distribuisce su un'area pari a  $S = 4\pi r^2$ . Quindi

$$I = \left\langle \frac{\mathcal{P}}{S} \right\rangle = r^{-2} \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2$$

L'impedenza non può calare come  $r^{-2}$ , la pulsazione neanche. Quindi dobbiamo concludere che  $A = A'/r$ , ossia:

$$I = \left\langle \frac{\mathcal{P}}{S} \right\rangle = \frac{1}{2} Z \omega^2 \frac{A'^2}{r^2} \quad \Leftrightarrow \xi(r, t) = \frac{A'}{r} \cos(kr - \omega t)$$

## Lezione 14: 10 aprile 2024

### 3.3 Onde vettoriali

Generalizziamo ora la trattazione delle onde al caso in cui le perturbazioni siano vettoriali. Per quanto riguarda la corda, ad esempio, se ci limitiamo agli spostamenti trasversali nello spazio vediamo che la corda si può muovere sia su  $y$  che su  $z$ . Le relazioni fra le componenti del vettore e delle sue derivate vanno sotto il nome generico di "polarizzazione". Consideriamo una grandezza generica:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = \xi_x(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{i}} + \xi_y(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{j}} + \xi_z(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{k}}$$

L'equazione di D'Alembert non varia, è come se ogni componente si propagasse indipendentemente dalle altre:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

che ha per ogni componente la stessa soluzione delle onde scalari. Sembra che non ci siano relazioni fra le componenti! Tuttavia non è così, potrebbero esserci delle equazioni di partenza che collegano le grandezze che si propagano (es: equazioni di Maxwell), oppure potrebbe esserci qualcosa che le correla alla sorgente (es: corda ruotata nel salto della corda).

#### 3.3.1 Onde piane vettoriali

In generale la soluzione è formalmente simile a quella per le onde piane scalari:

$$\forall \hat{\mathbf{u}} \forall \mathbf{f} \in \mathcal{C}^2, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - vt)$$

Per esempio, poniamo  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{k}}$ . Ottengo la seguente soluzione che rappresenta tre onde piane che si propagano lungo  $z$ :

$$\begin{cases} \xi_x(z, t) = f_x(z - vt) \\ \xi_y(z, t) = f_y(z - vt) \\ \xi_z(z, t) = f_z(z - vt) \end{cases}$$

**Onde piane trasversali** Rimandando all'esempio appena fatto, la condizione di onda trasversale si esprime tramite l'uguaglianza  $f_z(z - vt) \equiv 0$ . In caso di direzione di propagazione  $\hat{\mathbf{u}}$ , la condizione di onda trasversale è  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - vt) = 0$ . Una componente quindi si annulla, mentre ne restano altre due indipendenti.

**Esempio (Onde trasversali comuni).** Onde trasversali su corda elastica, onde elettromagnetiche, onde trasversali nei solidi (hanno velocità diverse da onde longitudinali), onde sismiche sussultorie (onde S, onde secondarie).

**Onde piane longitudinali** Sempre pensando all'esempio precedente, se fosse un'onda longitudinale allora  $f_z(z - vt)$  dovrebbe essere l'unica componente diversa da zero. Le altre due componenti dovrebbero essere nulle. Quindi in generale la condizione di onda longitudinale rispetto a una direzione si esprime così:  $\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} - vt) \equiv \mathbf{0}$ . Quindi rimane solo la componente nella direzione del moto.

**Esempio (Onde longitudinali comuni).** Onde sonore, onde nel volume dei fluidi, onde longitudinali nei solidi, onde sismiche ondulatorie (onde P, onde principali).

### 3.4 Polarizzazione

Nelle onde longitudinali non può esserci polarizzazione, alla fine sono analoghe alle onde scalari perché c'è una sola componente. Le trasversali hanno due componenti libere e quindi una dinamica più ricca.

#### 3.4.1 Primo caso: polarizzazione lineare

Può capitare che le due componenti libere siano, a meno di una costante, la stessa funzione:

$$\begin{cases} \xi_x(z, t) = f_x(z - vt) \\ \xi_y(z, t) = f_y(z - vt) \\ \xi_z(z, t) = f_z(z - vt) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_x(z, t) = A_x f(z - vt) \\ \xi_y(z, t) = A_y f(z - vt) \\ \xi_z(z, t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\xi_x(z, t)}{\xi_y(z, t)} = \frac{A_x}{A_y}$$

Essendo le componenti x e y sempre proporzionali, il vettore  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t)$  ha una direzione costante. Si può avere polarizzazione lineare sia per onde periodiche che impulsive.

#### 3.4.2 Polarizzazione circolare ed ellittica

Consideriamo un caso particolare:

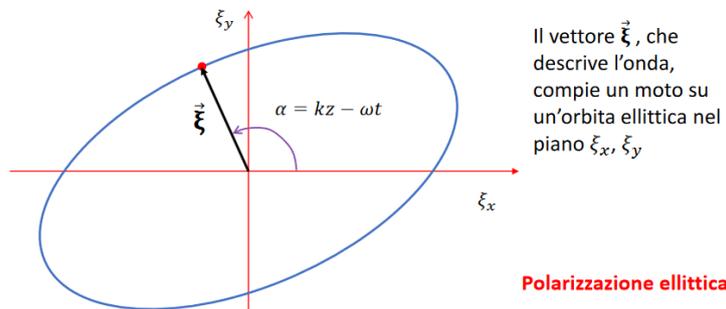
$$\begin{cases} \xi_x(z, t) = A_x \cos(kz - \omega t) \\ \xi_y(z, t) = A_y \cos(kz - \omega t + \beta) \\ \xi_z(z, t) = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo sviluppare un po' i calcoli per capire la relazione tra le componenti  $\xi_x$  e  $\xi_y$ :

$$\begin{aligned} \text{Posto } \alpha = kz - \omega t: \quad \frac{\xi_x}{A_x} = \cos(\alpha) &\Leftrightarrow \left(\frac{\xi_x}{A_x}\right)^2 = \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \\ \xi_y(z, t) = A_y \cos(kz - \omega t + \beta) &\Leftrightarrow \frac{\xi_y}{A_y} = \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \frac{\xi_y}{A_y} - \cos(\alpha)\cos(\beta) = -\sin(\alpha)\sin(\beta) &\rightarrow \left(\frac{\xi_y}{A_y} - \frac{\xi_x}{A_x}\cos\beta\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{\xi_x}{A_x}\right)^2\right)\sin^2\beta \\ \rightarrow \left(\frac{\xi_x}{A_x}\right)^2 \sin^2\beta + \left(\frac{\xi_x}{A_x}\right)^2 \cos^2\beta - 2\cos\beta \frac{\xi_x}{A_x} \frac{\xi_y}{A_y} + \left(\frac{\xi_y}{A_y}\right)^2 &= \sin^2\beta \end{aligned}$$

Otteniamo un'equazione che non dipende nè dal tempo nè dallo spazio, in particolare è l'equazione di un'ellisse!

$$\left(\frac{\xi_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{A_y}\right)^2 - 2\cos\beta \frac{\xi_x}{A_x} \frac{\xi_y}{A_y} = \sin^2\beta \tag{3.4}$$



Vediamo dei casi particolari.

**Caso 1:**  $\beta = 0$  Ottengo

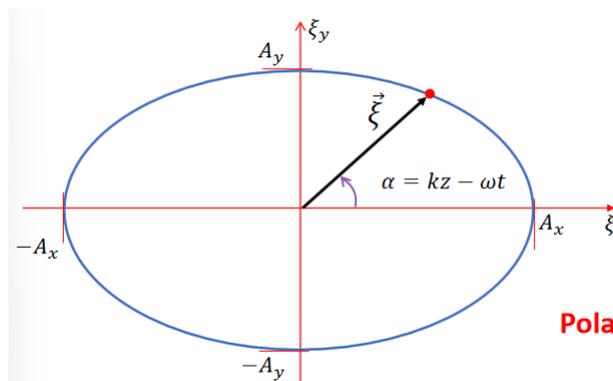
$$\left(\frac{\xi_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{\xi_x}{A_x} \frac{\xi_y}{A_y} = 0 \rightsquigarrow \left(\frac{\xi_x}{A_x} - \frac{\xi_y}{A_y}\right)^2 = 0 \rightsquigarrow \frac{\xi_y}{A_y} = \frac{\xi_x}{A_x}$$

È esattamente la stessa situazione della polarizzazione lineare! Si tratta di un'ellisse degenerata in una retta.

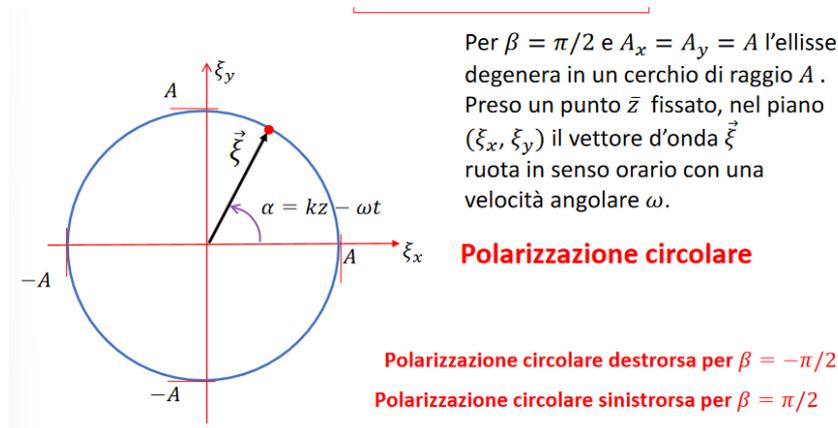
**Caso 2:**  $\beta = \pm\pi/2$  L'equazione (3.4) si riduce a

$$\left(\frac{\xi_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{A_y}\right)^2 = 1$$

che è l'equazione di un'ellisse con gli assi principali paralleli all'asse  $\xi_x$  e  $\xi_y$ .



**Caso 3:**  $\beta = \pm\pi/2$ ,  $A_x = A_y$  L'equazione (3.4) si riduce a quella di una circonferenza.



In generale, il verso di rotazione si determina guardando l'onda che sta arrivando. Se, guardando arrivare l'onda, vedo il vettore ruotare in senso antiorario si parla di *polarizzazione destrorsa*, altrimenti di *polarizzazione sinistrorsa*. La polarizzazione destrorsa si avrà per  $-\pi \leq \beta \leq 0$ , la polarizzazione sinistrorsa per  $0 \leq \beta \leq \pi$ . La polarizzazione è una relazione nello spazio tra le componenti di un'onda vettoriale, quindi si può verificare anche per le onde stazionarie!

**Osservazione.** Quando si parla di polarizzazione ellittica non vale il principio di sovrapposizione! Devo avere **una sola onda armonica**.

**Nota.** Domanda tipica da orale: nella polarizzazione ellittica abbiamo la stessa pulsazione, ma vuol dire che siamo in una situazione di interferenza? No! Perché non sono sullo stesso asse.

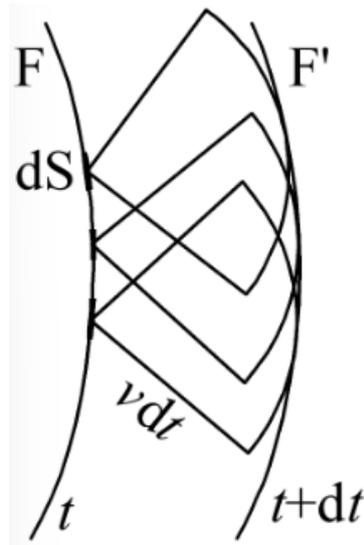
### 3.5 Principio di Huygens-Fresnel

Qui in realtà non è necessario che l'onda sia vettoriale, quindi useremo le onde scalari per parlarne. Le onde sembrano propagarsi in linea retta, ma non è necessariamente vero! Ad esempio, noi sentiamo il suono anche se fra noi e la sorgente c'è un ostacolo. Stessa cosa vale per le onde elettromagnetiche. Marconi ha acceso una lampadina a New York dando il comando da Genova (che ragaz). Anche le onde del mare, passando attraverso degli scogli, iniziano a propagarsi circolarmente invece che linearmente.

Questi fenomeni si descrivono bene attraverso il principio di Huygens-Fresnel, che è un "principio di classe B" perché in realtà è contenuto nelle equazioni di D'Alembert.

**Teorema 3.5.1** (Principio di Huygens-Fresnel). Ogni punto del fronte d'onda può essere considerato una nuova sorgente di onde sferiche, che si propagano in tutte le direzioni, con le stesse  $\nu$  e  $\omega$  dell'onda iniziale.

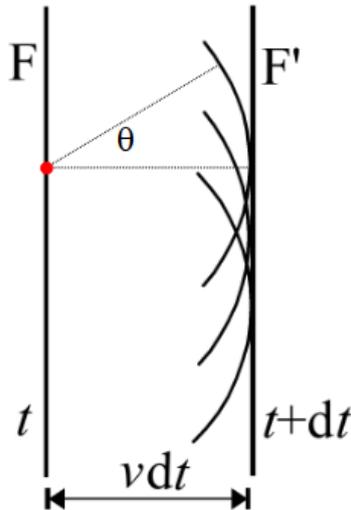
Nota un fronte d'onda al tempo  $t$ , si costruisce quello a  $t + dt$ . Esempio:



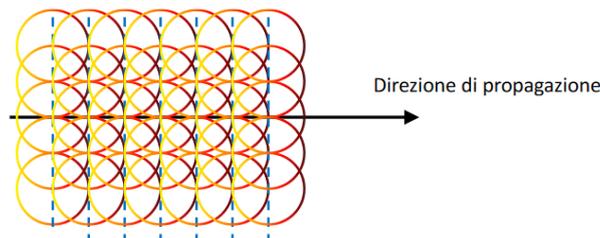
Non devo solo conoscere il fronte d'onda, ma anche la direzione di moto del fronte d'onda. Mi serve quindi almeno un'informazione in più. Matematicamente scriviamo che

$$\psi(\vec{r}, t + dt) = \int \psi(\vec{r}', t) f(\theta) dS'$$

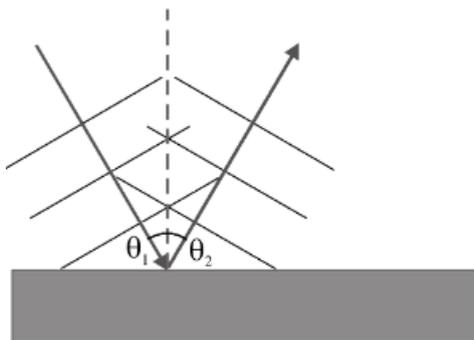
Dove  $f(\theta)$  deve descrivere l'ampiezza al variare dell'angolo  $\theta$  nella figura seguente:



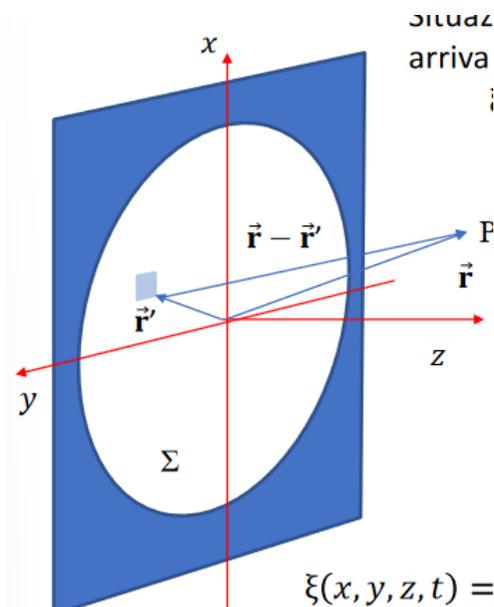
Fresnel ipotizzò che  $f(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ . All'indietro così ho interferenza distruttiva. Appliciamola molto qualitativamente a un'onda piana:



In ottica geometrica, questo si traduce nel principio secondo cui l'angolo di incidenza di un raggio luminoso è uguale all'angolo di riflessione.



Studiamo la motivazione fisica dietro a questo principio. Supponiamo che ci sia una parete infinita con un'apertura su cui arriva un'onda armonica piana scalare (per semplicità, altrimenti si applica alle tre componenti vettoriali). Sia l'onda  $\xi(z, t) = A \cos(kz - \omega t) = A \operatorname{Re}[e^{i(kz - \omega t)}]$ . Sul piano  $\xi(0, t) = A \operatorname{Re}[e^{-i\omega t}]$ .



Pongo  $s(x, y, z, t) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  e  $\cos \theta = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{k}} / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Applicando il principio si ottiene

$$\xi(x, y, z, t) = C \int_{\Sigma} \xi(x', y', 0, t - \frac{s}{v}) \frac{e^{iks}}{s} \frac{1 + \cos \theta}{2} dx' dy'$$

con  $C = \frac{ik}{2\pi}$

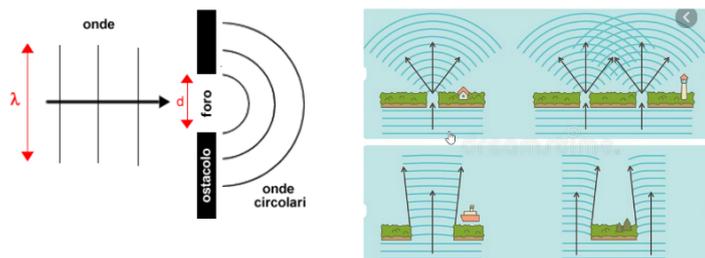
### 3.5.1 Limite dei piccoli angoli e diffrazione

Se  $|\mathbf{r}'| \ll z$  possiamo trascurare la dipendenza angolare, ottenendo

$$\xi(x, y, z, t) = \frac{ikA}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{e^{i(ks - \omega t)}}{s} dx' dy'$$

Nel caso di onde non armoniche occorrerà chiaramente svilupparle in serie di Fourier. Scopriamo che le onde a lunghezza d'onda elevata saranno soppresse, quelle a lunghezza d'onda piccola rispetto all'apertura saranno poco deviate, mentre quelle con lunghezze d'onda confrontabili con l'apertura saranno quelle maggiormente deviate!

È la capacità delle onde di proseguire oltre gli ostacoli, eventualmente cambiando la forma del fronte d'onda!



Nell'immagine delle due aperture in alto a destra capiamo che le due onde genereranno interferenza perché hanno le stesse caratteristiche temporali. Se ad esempio l'ostacolo che causa la diffrazione è un dischetto, sull'asse del disco avrò interferenza costruttiva e percepirò il segnale come se non ci fosse l'ostacolo.

Questi fenomeni avvengono anche con le onde sonore. In un generico punto dello spazio le onde sonore possono arrivare con una differenza di fase a causa della differenza nel percorso. Potrebbero addirittura avere intensità nulla!

**Nota.** Di questa lezione non sono importanti tanto i dettagli matematici quanto i concetti. L'integrale del principio di Huygens-Fresnel è molto complesso, quindi non ci sarà mai un esercizio in merito.

# Capitolo 4

## Onde elettromagnetiche

Lezione 15: 16 aprile 2024

### 4.1 Equazione di D'Alembert

Tra il 1863 e il 1865 Maxwell propose una teoria dell'elettromagnetismo che oggi sono sintetizzate nelle equazioni che portano il suo nome: "Equazioni di Maxwell".

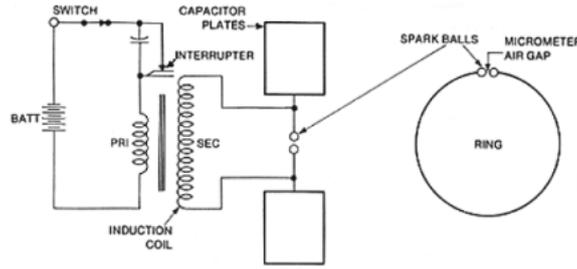
$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

dove  $Q_{int}, \rho, I, \vec{J}$  si riferiscono a cariche e correnti vere. Ci poniamo nel vuoto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Consideriamo  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$  in un punto dello spazio. Allora il rotore del campo magnetico sarà diverso da zero.  $\nabla \times \vec{B} \neq \mathbf{0} \implies \vec{B} \neq \mathbf{0}$  in una regione spaziale infinitesima attorno a quel punto. Ma di conseguenza si genera un campo elettrico nella regione circostante di spazio. Una perturbazione locale si è propagata nello spazio circostante! Maxwell valutò che la perturbazione doveva muoversi con velocità  $v \approx 3.11 \times 10^8$  m/s. La velocità della luce nota nel 1865 era  $2.98 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \leq v \leq 3.15 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ . Non c'era nient'altro di vicino a quella velocità, quindi si ipotizzò che la luce potesse essere un fenomeno elettromagnetico.

Hertz fece un esperimento:



La batteria genera corrente continua, attraverso il trasformatore viene trasformata in corrente alterna che carica le placche di un condensatore. Ogni tanto le sferette scaricano una scintilla e questo provoca una scintilla nel risonatore circolare che non è connesso a nulla. Augusto Righi nel 1894 produsse delle onde micrometriche, mentre Marconi nel 1895 controllò un interruttore da remoto.

Scrivendo le equazioni di Maxwell in termini di  $\mathbf{H}$  esse diventano più simmetriche:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{Posto} \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{H}} = \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} \\ \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{H}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \end{cases}$$

Sono equazioni differenziali alle derivate prime, lineari e omogenee. Di conseguenza vale il principio di sovrapposizione. Ricaviamo l'equazione di D'Alembert per le onde elettromagnetiche. Ricordando che  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \nabla \times \vec{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) = \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{\mathbf{B}})}{\partial t} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} & \textcircled{4} -\frac{\partial (\nabla \times \vec{\mathbf{B}})}{\partial t} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \\ -\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} & \boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}} \end{aligned}$$

Da questa equazione ricaviamo che  $c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Otteniamo lo stesso risultato per i vettori magnetici:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}} \quad \boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}} \quad \boxed{\nabla^2 \vec{\mathbf{H}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2}}$$

Queste non sono tuttavia le equazioni delle onde elettromagnetiche! Da queste equazioni sembra che i campi siano indipendenti. Le onde elettromagnetiche sono descritte da equazioni che abbiamo già visto, ovvero le equazioni di Maxwell nel vuoto.

**Onde elettromagnetiche piane armoniche** Cerchiamo una soluzione nella forma di onde piane armoniche:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ . Sono onde in moto nella direzione  $\mathbf{k}$ .

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = -i\omega \mathbf{E} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = ik_x E_{0x} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + ik_y E_{0y} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + ik_z E_{0z} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= i(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = i\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = i\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

Trattando queste onde, posso ricordarmi queste regole:  $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$ ,  $\nabla \cdot = i\mathbf{k} \cdot$ ,  $\nabla \times = i\mathbf{k} \times$ ,  $\nabla = i\mathbf{k}$ . Applicandole, ottengo che

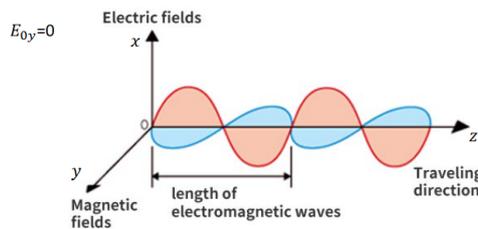
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \begin{cases} \textcircled{1} i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \textcircled{2} i\vec{k} \times \vec{E} = +i\omega \vec{B} \\ \textcircled{3} i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \textcircled{4} i\vec{k} \times \vec{B} = -i\omega \frac{\vec{E}}{v^2} \end{cases} \begin{cases} \vec{E} \perp \vec{k}, \vec{B} \perp \vec{k}, \textcircled{1} \textcircled{3} \\ \text{Onde trasversali} \\ \vec{E} = v^2 \vec{B} \times \frac{\vec{k}}{\omega} = \textcircled{4} \\ = v \vec{B} \times \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \\ \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} \textcircled{2} \end{cases}$$

Quindi  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$  costituiscono una terna destrorsa. Inoltre si ha che  $|\mathbf{E}| = v|\mathbf{B}|$ . Queste sono condizioni che vanno rispettate anche da  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{B}_0$ , quindi non possono avere qualsiasi valore.

Sia  $\mathbf{k}$  diretto come l'asse  $z$  ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz$ ). Quindi ho che

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \hat{i} + E_{0y} \sin(kz - \omega t) \hat{j} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}(z, t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = -\frac{E_{0y}}{v} \sin(kz - \omega t) \hat{i} + \frac{E_{0x}}{v} \cos(kz - \omega t) \hat{j} \end{aligned}$$

La componente  $x$  di  $\mathbf{B}$  dipende dalla componente di  $y$  di  $\mathbf{E}$  e viceversa. Le onde si propagano come mostrato di seguito:



I nodi sono nello stesso punto, sia per la parte magnetica che per la parte elettrica.

## 4.2 Onde nei mezzi

Nei mezzi non ci sono  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$ , ma  $\mu$  e  $\epsilon$ . Quindi ho una velocità più bassa:  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ . Se scrivo  $\mathbf{E} = v\mathbf{B} = v\mu\mathbf{H}$ , noto che c'è una proporzionalità fra  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ . Chiamo la costante di proporzionalità "impedenza elettromagnetica del mezzo". Rappresenta una relazione causa-effetto (come già visto)! Una variazione di  $\mathbf{E}$  produce una variazione di  $\mathbf{H}$ .

**Definizione 4.2.1** (Impedenza elettromagnetica).

$$Z = v\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \qquad Z_0 = c\mu_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

**Onde nei mezzi ottici** Nei mezzi ottici  $\mu_r \approx 1$  quindi  $v \approx c/\sqrt{\epsilon_r}$ .

**Definizione 4.2.2** (Indice di rifrazione del mezzo).

$$n = \frac{c}{v} \geq 1, \quad n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

Di conseguenza

$$Z = v\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \approx \frac{Z_0}{n}$$

### 4.3 Energia, intensità e vettore di Poynting

Studiando le equazioni di Maxwell si arriva alla formula del bilancio energetico per i campi elettrico e magnetico:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) + \nabla \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) + \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0$$

Il primo termine contiene la densità di energia elettromagnetica,  $u_{EM} = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$ . Il secondo termine è detto "vettore di Poynting".

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Nel vuoto poniamo  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . Troviamo un'equazione sorprendentemente simile come forma alla conservazione della carica elettrica:

$$\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

Significa che c'è uno spostamento di energia elettromagnetica. Studiamo una regione macroscopica dello spazio, prendendo un volume  $V$  fisso:

$$\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\mathbf{S}} \rightarrow \int \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} dv = - \int \nabla \cdot \vec{\mathbf{S}} dv$$

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V u_{EM} dv \right) = - \int_{\Sigma=\partial V} \vec{\mathbf{S}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

L'unità di misura del vettore di Poynting è  $\frac{W}{m^2}$ . È la stessa unità di misura dell'intensità delle onde sonore.

#### 4.3.1 Applicazione alle onde

Troviamo che per le onde elettromagnetiche l'energia elettrica e l'energia magnetica sono sempre uguali:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon v^2 B^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 = u_B$$

$$u_{EM} = u_E + u_B = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2 = \mu H^2$$

$$\rightsquigarrow u_{EM} = \frac{1}{vZ} E^2 = \frac{Z}{v} H^2$$

Il modulo del vettore di Poynting è

$$|\vec{\mathbf{S}}| = \frac{|\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}|}{\mu_0} = |\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}| = ZH^2 = \frac{1}{Z} E^2$$

Otteniamo una relazione molto simile alla proporzionalità fra potenza ed energia nelle onde meccaniche:

$$|\mathbf{S}| = v u_{EM}$$

#### 4.3.2 Intensità per onde elettromagnetiche

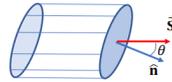
Consideriamo una superficie arbitraria investita da un'onda elettromagnetica. Per quanto trovato prima

$$\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

Se ho un'onda periodica ho

$$\left\langle \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} \right\rangle = 0 \implies \langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle = 0$$

Il vettore di Poynting non è solenoidale, ma è solenoidale in media. Considero un tratto infinitesimo del tubo di flusso lungo  $dl = vdt$ :



Tutta l'energia inizialmente nel cilindro esce in un tempo  $dt$ . L'energia che attraversa  $dS_{\perp} = dS \cos(\theta)$  in  $dt$  è

$$dU_{EM} = u_{EM}dV = u_{EM}dS_{\perp}vdt$$

**Definizione 4.3.1** (Intensità di un'onda elettromagnetica).

$$I = \left\langle \frac{dU_{EM}}{dS_{\perp}dt} \right\rangle = \langle u_{EM}v \rangle = v \langle u_{EM} \rangle = \langle |\mathbf{S}| \rangle$$

Per un'onda armonica vale

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \left\langle \frac{1}{Z} E^2 \right\rangle = \langle ZH^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z} = \frac{1}{2} ZH_0^2$$

**Cosa sono le onde elettromagnetiche** Sono onde dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , ma sono anche onde di densità di energia elettromagnetica:

$$u_{EM} = \frac{E_0^2}{vZ} \cos^2(kz - \omega t)$$

E anche onde di vettore di Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{E_0^2}{Z} \cos^2(kz - \omega t) \mathbf{k}$$

Si noti che queste onde vanno con il coseno al quadrato, quindi sono solo positive!

**Nota.** Qual è la polarizzazione del vettore di Poynting?

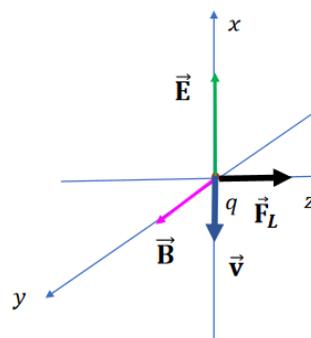
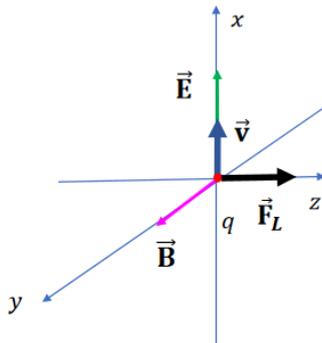
## Lezione 16: 17 aprile 2024

### 4.4 Pressione di radiazione

Come le onde meccaniche, anche le onde elettromagnetiche trasportano energia ( $\langle u_{EM} \neq 0 \rangle$ ). Associato alle onde elettromagnetiche c'è anche il vettore di Poynting, che ha valore medio diverso da zero (quindi trasporta qualcosa!). Si può mostrare che il vettore di Poynting è in grado di esercitare una pressione "di radiazione" sui corpi. Trasportano anche momento angolare, ma questo lo scopriremo in meccanica quantistica. Ma come nasce la pressione di radiazione? Studiamo il comportamento di una carica positiva ( $q > 0$ ) in un mezzo conduttivo in presenza di un'onda elettromagnetica di questo tipo:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{E_0}{v} \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{j}}$$



Il campo elettrico mette in moto la carica  $e$ , essendo in un mezzo conduttivo dove vale  $\mathbf{E} = \rho_R \mathbf{J} = \rho_R n q \mathbf{v}$ , otteniamo che  $\mathbf{v} \propto \mathbf{E}$ . Avendo una velocità verso le  $x$  positive, la carica subisce una forza di Lorentz diretta lungo l'asse  $z$  positivo per tutta la fase dell'onda in cui la componente del campo elettrico è positiva. Quando il campo elettrico si ribalta (quindi anche la velocità della carica) e va verso il basso, anche il campo magnetico inverte il suo verso e quindi il risultato netto è che la forza di Lorentz è diretta anche in questo caso nel verso di propagazione. Nel caso di una carica negativa non cambia nulla! Complessivamente la forza di Lorentz dipende da  $q^2$ , quindi ha sempre lo stesso verso indipendentemente dal segno della carica.

Consideriamo ora una piastra metallica con superficie  $\Sigma$  e  $N$  cariche libere sulla superficie. Su ogni carica agisce una forza data da  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , quindi sull'intera piastra si avrà una forza complessiva pari a  $\mathbf{F}_{tot} = Nq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . La forza elettrica oscilla e quindi mediamente è nulla, ma quella di natura magnetica ha sempre la stessa direzione. La potenza media fornita dall'onda alla piastra è data da

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathbf{F}_{tot} \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle Nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \rangle$$

che ci dà la potenza spesa per unità di area:

$$\left\langle \frac{\mathcal{P}}{\Sigma} \right\rangle = \left\langle \frac{Nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{\Sigma} \right\rangle = \sigma \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \rangle$$

Se l'onda elettromagnetica viene completamente assorbita dalla piastra, si ha che la potenza spesa per unità di area è uguale all'intensità dell'onda iniziale:

$$I = \left\langle \frac{\mathcal{P}}{\Sigma} \right\rangle = \sigma \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \rangle$$

Abbiamo visto che la forza di Lorentz è diretta sempre nella direzione di propagazione dell'onda. Per onde elettromagnetiche che si incontrano quotidianamente le oscillazioni sono molto rapide, il campo magnetico ha modulo  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$  e le velocità massime degli elettroni sono significativamente inferiori a quelle della luce. Quindi la forza elettrica è sempre dominante rispetto a quella di Lorentz e si può approssimare la direzione di  $\mathbf{v}$  con quella di  $\mathbf{E}$ , ottenendo quindi:

$$\langle \mathbf{F}_{tot} = N \langle |q\mathbf{v} \times \mathbf{B}| \rangle \rangle = \frac{Nq \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \rangle}{c}$$

Da questo si trova che la pressione è

$$p = \left\langle \frac{\mathbf{F}_{tot}}{\Sigma} \right\rangle = \frac{\sigma}{c} \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \rangle = \frac{I}{c} = \frac{\langle |\mathbf{S}| \rangle}{c}$$

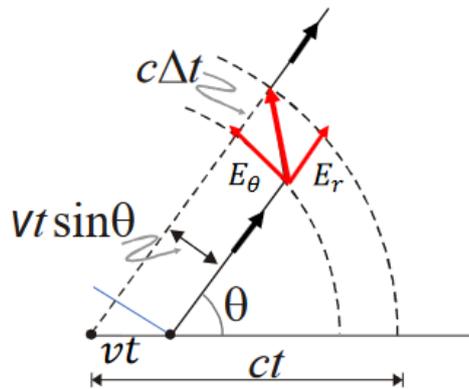
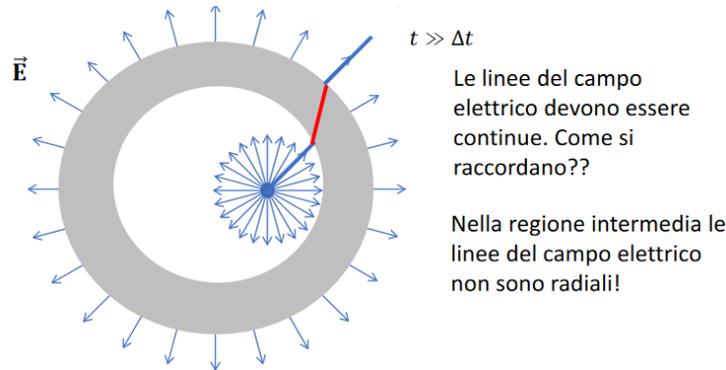
**Nota storica** Misurare la pressione di radiazione è molto difficile perché è necessaria un'intensità molto alta! I primi radiometri dell'800 funzionavano al contrario, perché l'effetto dell'onda era di scaldare una delle due facce della piastra metallica e quindi le molecole di gas spingevano leggermente la piastra avendo velocità leggermente diverse da un lato della piastra e dall'altro. Oggi la pressione di radiazione è utilizzata per i viaggi spaziali con le vele solari.

## Lezione 17: 24 aprile 2024

### 4.5 Produzione di onde elettromagnetiche

Le sorgenti dei campi elettrico e magnetico sono le cariche. Consideriamo una carica  $q > 0$  ferma nell'origine che genera un campo elettrico statico. Questo non genera onde elettromagnetiche. Se mettiamo in moto la carica a velocità costante, esisterà un sistema di riferimento inerziale solidale con la carica in cui il campo elettrico è ancora statico. Le onde elettromagnetiche sono indipendenti dal SdR, quindi anche in questo caso non ho onde elettromagnetiche. Allora la carica deve essere accelerata! Divido l'asse dei tempi in tre fasi: carica ferma per  $t < 0$ , carica accelerata da 0 a  $\Delta t$  con accelerazione  $a$ , carica in moto uniforme a velocità  $v = a\Delta t$  per  $t > \Delta t$ . N.B.: per la teoria della relatività, esiste una regione finita centrata attorno all'origine in cui l'informazione sull'accelerazione della carica è arrivata. All'esterno l'informazione non è ancora arrivata. Quando la carica si muove di moto uniforme si ripete la stessa

situazione: c'è una "bolla" che sa che la carica ha moto uniforme e una regione intermedia che non lo sa ancora.



Se  $v \ll c$ , il campo  $\mathbf{E}$  si può raccordare con un segmento. Considero  $\Delta t$  piccolo a piacere e  $t \gg \Delta t$ .

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{vt \sin(\theta)}{c\Delta t} = \frac{at \sin(\theta)}{c}$$

$$\Rightarrow E_\theta = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \frac{at \sin(\theta)}{c} \approx$$

$$\approx \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 rct} \right) \frac{at \sin(\theta)}{c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \sin(\theta)}{c^2 r}$$

**Definizione 4.5.1** (Campo di radiazione). Quanto trovato è detto "campo di radiazione":

$$E_\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \sin(\theta)}{c^2 r}$$

Cala meno velocemente del campo elettrostatico, quindi a grandi distanze sarà più presente il campo di radiazione. Dipende anche dalla componente dell'accelerazione proiettata sulla direzione di propagazione del campo ( $a \sin(\theta)$ ).

Se ho un moto accelerato arbitrario,  $a = a(t)$ . Il campo di radiazione impiega il tempo  $t_p = r/c$ :

$$E_\theta(r, t + \frac{r}{c}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin(\theta)}{c^2 r} a(t)$$

$$E_\theta(r, t') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin(\theta)}{c^2 r} a\left(t' - \frac{r}{c}\right)$$

dove  $t$  è il tempo rispetto al moto nell'origine e  $t'$  è il tempo visto dal punto in cui è presente il campo di radiazione. Un'accelerazione di breve durata implica un campo di radiazione impulsivo. Posso far

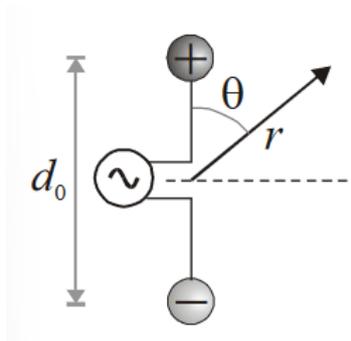
oscillare la carica di moto armonico ( $y(t) = A \sin(\omega t) \rightsquigarrow a = y = -\omega^2 A \sin(\omega t)$ ) e ottenere

$$E_\theta(r, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sin(\theta)}{r} A \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) = A' \frac{\omega^2 \sin(\theta)}{r} \sin(kr - \omega t)$$

dove  $k := \omega / c$  e il tempo è quello nel punto in cui viene effettuata la misura. È, come previsto, un'onda sferica! L'ampiezza decresce come  $1 / r$ .

### 4.5.1 Dipolo oscillante

Molto spesso le onde elettromagnetiche sono generate tramite dipoli oscillanti:



Il momento di dipolo si scrive

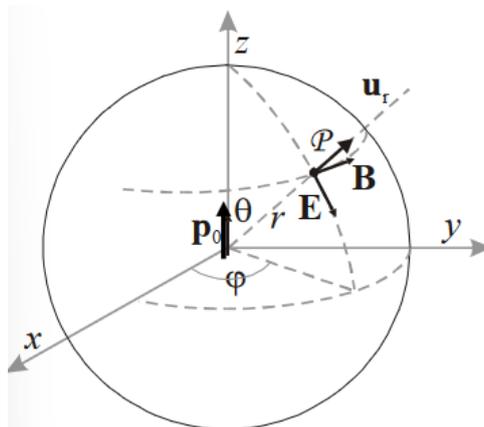
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \sin(\omega t)$$

con  $d_0 = 2A$ ,  $p_0 = 2Aq$ . Questo implica che possano oscillare le cariche a distanza costante o oscillare la distanza a cariche costanti. Lungo  $r$  si propaga un'onda elettromagnetica trasversale di intensità proporzionale al campo di radiazione:

$$\langle I \rangle \propto \omega^4 \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}$$

### 4.5.2 Onda sferica

L'onda sferica che si genera non è uniforme.  $E$  dipende dall'angolo  $\theta$ .  $\mathbf{E}$  è lungo il meridiano,  $\mathbf{B}$  lungo il parallelo, la propagazione è lungo  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .



$$\begin{cases} E = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sin\theta}{r} \sin(kr - \omega t) \\ B = \frac{E}{c} \end{cases}$$

Ho campi nulli lungo l'asse del dipolo ( $\theta = 0, \pi$ ). È il motivo per cui le antenne WiFi poste in alto funzionano peggio e perché sotto un'antenna telefonica non prende bene.

**Energia** L'intensità può essere calcolata così:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle = \langle P \rangle = \langle u_{EM} \rangle c = \langle \epsilon_0 E^2 \rangle c &= \frac{p_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \frac{\sin^2\theta}{r^2} \frac{\epsilon_0 c}{2} = \\ &= \frac{p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{c^3 r^2} \end{aligned}$$

Si può anche calcolare la potenza emessa da un'antenna:

$$\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \langle \vec{S} \cdot d\vec{A} \rangle = \int_{sfera} \left( \frac{p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{c^3 r^2} \right) r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

Per raddoppiare la frequenza, è necessario aumentare la potenza di un fattore 16. Ci sono anche generatori di onde elettromagnetiche che funzionano con correnti oscillanti (quindi tramite un'induttanza che genera un campo magnetico variabile nel tempo). Si studiano nello stesso modo dei dipoli oscillanti tramite la seguente analogia:

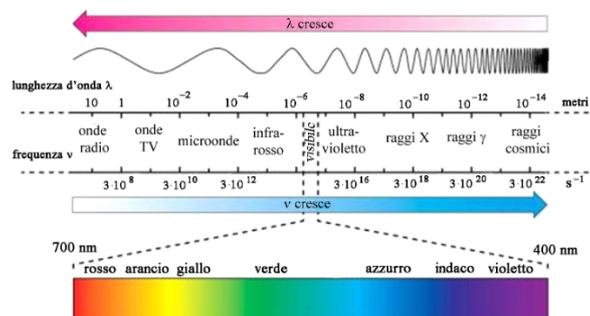
$$\begin{cases} q = q_0 \sin(\omega t) \\ i = \omega q_0 \cos(\omega t) = i_0 \cos(\omega t) \end{cases} \implies p_0 = q_0 d_0 = \frac{i_0 d_0}{\omega}$$

che permette di modificare il contributo della pulsazione alla potenza:

$$\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle_{\Sigma} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{i_0^2 d_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \omega^2 \propto \omega^2$$

## 4.6 Spettro elettromagnetico

Le onde elettromagnetiche sono principalmente descritte da tre grandezze:  $\nu = \omega / 2\pi$  frequenza,  $\lambda = c / \nu$  lunghezza d'onda, e  $E = \hbar\omega$  l'energia del fotone con  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$  Js. Lo spettro elettromagnetico è convenzionalmente diviso in 7 regioni:



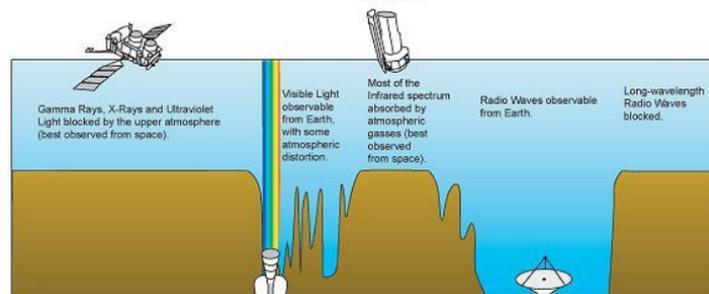
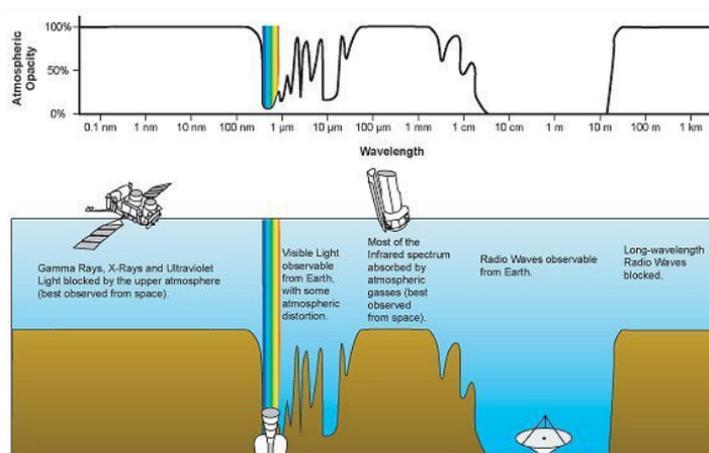
Nelle onde radio (0 - 1 GHz) è difficile studiare la natura corpuscolare della luce. L'energia dei fotoni è molto bassa, quindi si tratta semplicemente come un'onda. Qui vanno la maggior parte dei segnali delle comunicazioni (radio, TV).

nome	f in Hz	λ in m	indicazione	esempi
	$10^{-1}$			
	$10^{-9}$			Oscillazioni di terremoti, maree, ponti, tori, grattacieli, pendoli di orologio
bassa frequenza	3 Hz	$10^8$		telescriventi
BF	30 Hz	$10^7$		frequenze ultrasuoni
	300 Hz	$10^6$		16 Hz industriali
				125 Hz - 50 Hz - 50 Hz (frequenze acustiche (g))
Very Low Frequencies VLF	3 kHz	$10^5$	onde miriametriche	300 Hz telefono (orecchio umano) suoni percepibili
Low Frequencies LF	30 kHz	$10^4$	onde chilometriche	3,4 kHz ultrasuoni
Medium Frequencies MF	300 kHz	$10^3$	onde eptometriche	150 kHz radio
High Frequencies HF	3 MHz	$10^2$	onde decametriche	285 kHz 525 kHz 1605 kHz
Very High Frequencies VHF	30 MHz	$10^1$	onde metriche	3,95 MHz 26,1 MHz 47 MHz 30 MHz
Ultra High Frequencies UHF	300 MHz	$10^0$	onde decimetriche	40 MHz 223 MHz televisioni 750 MHz
Super High Frequencies SHF	3 GHz	$10^{-1}$	onde centimetriche	onde ultrasuoni
Extremely High Frequencies EHF	30 GHz	$10^{-2}$	onde millimetriche	gamma (infrarossi, luce e raggi x) 40 GHz ponti radio, radar
	300 GHz	$10^{-3}$		

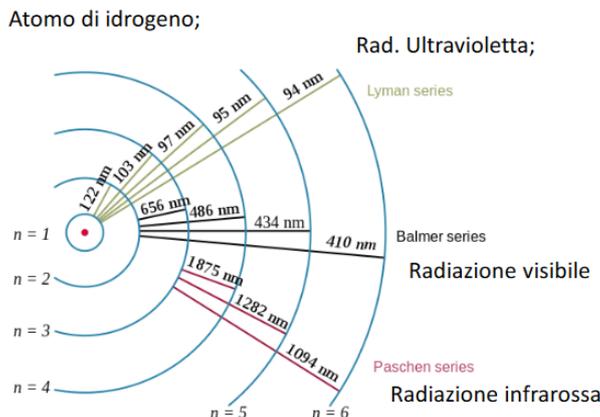
Al di sopra delle onde radio si trovano le microonde (1 - 300 GHz). Il microonde funziona perché la molecola d'acqua entra in risonanza a 2.45 GHz. Gli spaghetti non si fanno a microonde. Le microonde sono usate per le comunicazioni dei telefoni cellulari, per il WiFi e per i radar che devono individuare gli aerei (se un aereo è lungo 50 m, la lunghezza d'onda dev'essere molto minore).

Fra i 0.3 THz e i 428 THz si trova la banda dell'infrarosso. Qui si trovano le transizioni molecolari, l'emissione termica dei corpi e le comunicazioni in fibra ottica.

Tra i 0.4 μm e i 0.7 μm si trova la luce visibile. Qui risiedono le transizioni atomiche esterne (come lo spettro di emissione dell'idrogeno) e i colori. La descrizione deve essere necessariamente quantistica e quindi comprendere i fotoni. L'atmosfera è praticamente trasparente a queste onde elettromagnetiche:

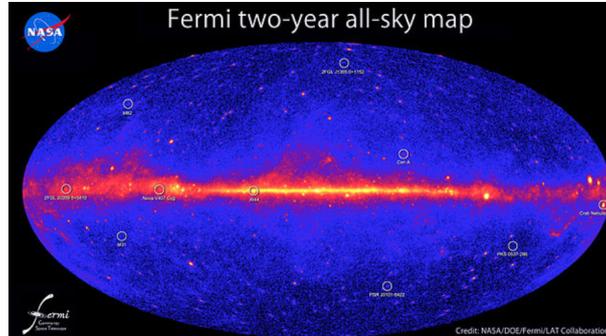


La regione dell'ultravioletto è fra 1 nm e 0.4 μm. Qui avvengono le transizioni atomiche profonde.



I raggi X si trovano fra 1 keV e 100 keV. Non c'è identità di vedute su questo intervallo. Qui risiedono le transizioni atomiche profonde di atomi pesanti e il frenamento di elettroni. Vengono usati per le radiografie (trapassano la maggior parte della materia) e le cristallografie (studiare i reticoli cristallini).

I raggi gamma hanno un'energia maggiore di 0.1 MeV. Le transizioni nucleari, le interazioni tra particelle elementari e i raggi cosmici appartengono a questa categoria. Nella figura seguente si vede il piano galattico studiato tramite raggi gamma:



## Lezione 18: 30 aprile 2024

### 4.7 Propagazione nei materiali

Per i materiali la velocità è  $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ , che nella maggior parte dei casi si riduce a  $c/\sqrt{\varepsilon_r} = c/n$  perché  $\mu_r \approx 1$  (i mezzi così sono detti mezzi ottici).

**Definizione 4.7.1** (Indice di rifrazione).

$$n = \frac{c}{v} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \geq 1$$

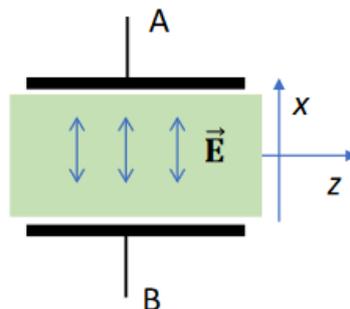
Considerando la luce che viaggia in acqua ( $\varepsilon_r \approx 80$ ), trovo che la velocità della luce dovrebbe essere  $v \approx c/9$ , mentre se faccio una misura trovo  $v \approx 3/4c$ . La soluzione potrebbe essere che la costante dielettrica relativa varia al passaggio di un'onda elettromagnetica! Nei mezzi ottici, senza cariche e senza correnti,  $|\mathbf{E}| = v|\mathbf{B}| = v\mu|\mathbf{H}|$ . Inoltre

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \cong \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$Z = v\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cong \frac{Z_0}{n}$$

#### 4.7.1 Cosa succede nei dielettrici?

Considero un mezzo dielettrico fra le lastre di un condensatore:



Detta  $V_0$  la differenza di potenziale applicata alle lastre del condensatore, il campo elettrico senza dielettrico sarà  $|\mathbf{E}| = V_0/d$  e in presenza di dielettrico sarà  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{E}_0|/\varepsilon_r$ . Il campo elettrico deforma le

molecole e nasce un momento di dipolo indotto:  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$  dove  $\alpha$  è la polarizzabilità atomica/molecolare. È come se ogni atomo sentisse una forza elettrica approssimabile  $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$ , in modo che le forze interne rispondano con una forza elastica  $f_e = -kx$ .

Consideriamo ora cosa succede quando il potenziale è variabile:  $\Delta V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ . L'asse  $x$  è diretto come il campo elettrico e ha origine sull'atomo. L'elettrone si comporta come un oscillatore armonico forzato. Sia  $f = -kx$  la forza di richiamo elastica,  $f_v = -\beta \dot{x}$  la forza viscosa e  $= E_0 e^{i\omega t}$  l'andamento del campo elettrico.

$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = -eE_0 e^{i\omega t}$$

Poniamo  $\gamma = \beta/m, \omega_0^2 = k/m$ . Siamo bravissimi e sappiamo già risolvere questo problema! (Guardiamo solo la soluzione stazionaria quando il transiente non ha più effetto).

$$x(t) = A e^{i\omega t} \text{ con } A = \frac{-eE_0}{m[(-\omega^2 + \omega_0^2) + i\gamma\omega]}$$

Ma a livello macroscopico cosa succede? Ogni atomo ha un dipolo atomico  $\mathbf{p} = -ex\hat{\mathbf{i}}$ . La polarizzazione del dielettrico è  $\mathbf{P} = n_a \mathbf{p}$  dove  $n_a$  è la densità atomica. Da elettromagnetismo sappiamo che c'è una relazione fra  $\mathbf{P}$  ed  $\mathbf{E}$ :  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi_e E_0 e^{i\omega t} \hat{\mathbf{i}}$ . Dalla soluzione precedente ho anche:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = n_a \mathbf{p} = -en_a x(t) \hat{\mathbf{i}} = \\ &= -en_a \frac{-eE_0}{m[(-\omega^2 + \omega_0^2) + i\gamma\omega]} e^{i\omega t} \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Da cui posso risolvere per  $\chi_e$  (la suscettività elettrica del materiale):

$$\varepsilon_0 \chi_e = \frac{n_a e^2}{m} \frac{1}{(-\omega^2 + \omega_0^2) + i\gamma\omega} \Rightarrow \chi_e(\omega) = \frac{n_a e^2}{m \varepsilon_0} \frac{1}{(-\omega^2 + \omega_0^2) + i\gamma\omega}$$

Da cui si ottiene che  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \chi_e(\omega)$  e l'indice di rifrazione che sarà:

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \sqrt{\varepsilon_r(\omega)} = \sqrt{1 + \chi_e(\omega)} \approx 1 + \frac{1}{2} \chi_e(\omega) \\ &= 1 + \frac{n_a e^2}{2m\varepsilon_0} \frac{1}{(-\omega^2 + \omega_0^2) + i\gamma\omega} \end{aligned}$$

L'indice di rifrazione ha una componente immaginaria, possiamo scriverlo come  $n(\omega) = n_r - in_I$  con

$$n_r = 1 + \frac{n_a e^2}{2m\varepsilon_0} \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad n_I = \frac{n_a e^2}{2m\varepsilon_0} \frac{\gamma\omega}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

La parte reale dell'indice di rifrazione dipende dalla pulsazione, quindi la velocità di fase dipende dalla pulsazione dell'onda e il mezzo è dispersivo! Anche  $k$  dipende dall'indice di rifrazione:

$$\begin{aligned} n(\omega) = \frac{c}{v(\omega)} \rightarrow v(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{\omega}{k} \rightarrow k = \frac{\omega n(\omega)}{c} \\ k = \frac{\omega n_r(\omega)}{c} - i \frac{\omega n_I(\omega)}{c} = k_r - ik_I \end{aligned}$$

**Legge di Lambert** Che significato ha il numero d'onda complesso  $k = k_r - ik_I$ ? Considero un'onda elettrica che si propaga nella direzione  $z$  e che oscilla come il campo elettrico di prima:  $E(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ .

$$E(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - (k_r - ik_I)z)} = E_0 e^{i(\omega t - k_r z)} e^{-k_I z} = (E_0 e^{-k_I z}) e^{i(\omega t - k_r z)}$$

L'onda appare muoversi con una velocità  $v = \omega / k_r = c / n_r$ , ma la sua ampiezza si riduce man mano che avanza nel mezzo dielettrico. Pongo  $\beta = k_I$ , l'ampiezza cala come  $E_0(z) = E_0 e^{-\beta z}$ . L'intensità dell'onda cambia con il progredire dell'onda nel mezzo ( $I \propto E_0^2$ ):

**Formula** (Legge di Lambert).

$$I(z) = I_0 e^{-2\beta z} = I_0 e^{-\mu z}$$

dove si è posto  $\mu = 2\beta$  che è detto *coefficiente di assorbimento*.

La dissipazione di energia è dovuta al termine viscoso dell'oscillatore forzato usato nel modellino.

**Velocità di gruppo** Essendo in un mezzo dispersivo, la velocità di fase e la velocità di gruppo saranno diverse. La velocità di gruppo si trova come segue:

Sappiamo che  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  con  $\omega = v_f k$  e  $v_f = \frac{c}{n_r(\omega)}$ .

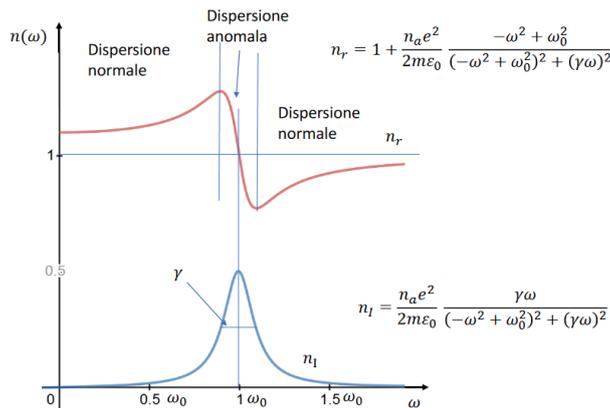
Quindi  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_f + k \frac{dv_f}{dk} = \frac{c}{n_r} + \frac{\omega n_r}{c} \frac{dv_f}{dk} = \frac{c}{n_r} + \frac{\omega n_r}{c} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{c}{n_r} \right) \frac{d\omega}{dk}$

Ma  $\frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{n_r} \right) = -\frac{1}{n_r^2} \frac{dn_r}{d\omega}$  E quindi  $\frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n_r} - \frac{\omega n_r}{n_r^2} \frac{dn_r}{d\omega} \frac{d\omega}{dk}$

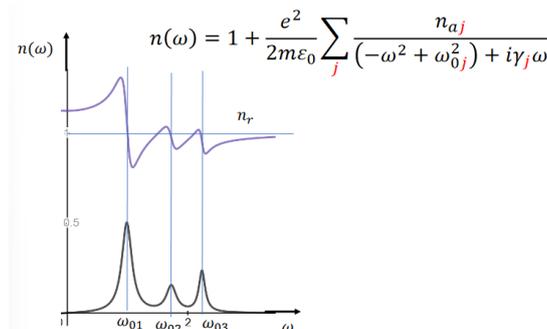
Risolviendo per  $\frac{d\omega}{dk}$  si trova  $\frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n_r + \omega \frac{dn_r}{d\omega}}$

**Osservazione.** Si possono avere due casi di dispersione: la dispersione normale e la dispersione anomala. Nel primo caso,  $\frac{dn_r}{d\omega} \geq 0 \implies v_g \leq v_f$ , mentre nel secondo  $\frac{dn_r}{d\omega} < 0 \implies v_g > v_f$ .

Si possono studiare gli andamenti della parte reale e immaginaria dell'indice di rifrazione di un singolo elettrone:



Ricordano molto l'ampiezza elastica e l'ampiezza assorbitiva! La regione del picco nella parte immaginaria dell'indice di rifrazione indica la regione in cui l'energia viene maggiormente assorbita dal materiale e quindi in cui l'onda fa più fatica ad attraversarlo. Notiamo che questi andamenti descrivono un atomo di idrogeno con un singolo elettrone. Nel caso generico in cui un atomo può avere più elettroni con diverse pulsazioni proprie si generalizza come segue:



Si nota che ad alte pulsazioni l'indice di rifrazione si avvicina a 1.

**Limite delle alte frequenze** Consideriamo il caso  $\omega \gg \omega_{0j} \forall j$ , cioè il limite di raggi X energetici o raggi gamma:

$$n_r = 1 + \frac{e^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{n_{aj}(-\omega^2 + \omega_{0j}^2)}{(-\omega^2 + \omega_{0j}^2)^2 + (\gamma_j \omega)^2} \xrightarrow{\omega \gg \omega_{0j}} 1 - \frac{e^2}{2m\epsilon_0 \omega^2} \sum_j n_{aj} < 1$$

Quindi si trova che la velocità di fase è maggiore di  $c$ !

$$v_f = \frac{c}{n_r} = \frac{c}{1 - \frac{e^2}{2m\epsilon_0 \omega^2} \sum_j n_{aj}} > c$$

Ma ci salviamo in corner: l'importante è che la velocità a cui viaggia l'informazione sia minore di  $c$ . Per fortuna è questo il caso:

$$n_r(\omega) = 1 - \frac{e^2}{2m\epsilon_0 \omega^2} \sum_j n_{aj} \rightsquigarrow \frac{dn_r}{d\omega} = \frac{e^2}{m\epsilon_0 \omega^3} \sum_j n_{aj}$$

da cui

$$v_g = \frac{c}{1 - \frac{e^2}{2m\epsilon_0 \omega^2} \sum_j n_{aj} + \omega \frac{e^2}{m\epsilon_0 \omega^3} \sum_j n_{aj}} = \frac{c}{1 + \frac{e^2}{2m\epsilon_0 \omega^2} \sum_j n_{aj}} < c$$

### 4.7.2 Propagazione in un metallo

Possiamo assumere il metallo come neutro, quindi  $\rho = 0$ . Però esistono cariche libere che danno origine a una corrente:  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ .

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \\ \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu\sigma \vec{\mathbf{E}} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \end{cases}$$

Sono equazioni lineari e omogenee, ottimo. Possiamo estrarre anche da qui l'equazione di D'Alembert?

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{E} &= \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Non è l'equazione di D'Alembert, quindi sono in un mezzo dispersivo. La ritrovo solo nel limite  $\sigma \rightarrow 0$ . Cerchiamo una soluzione nella forma di onde piane armoniche:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Così le equazioni di Maxwell assumono questa forma:

$$\begin{cases} i\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \\ i\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = +i\omega \vec{\mathbf{B}} \\ i\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \\ i\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{B}} = \left(\mu\sigma - i\frac{\omega}{v^2}\right) \vec{\mathbf{E}} \end{cases}$$

$\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$  quindi le onde in un metallo sono ancora onde trasversali. Inoltre  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ , ma in generale non sono in fase perché c'è un numero complesso come proporzionalità fra i due. Significa che il vettore  $\mathbf{k}$  contiene una fase complessa. Provo a ricavare la componente complessa di  $\mathbf{k}$ .

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega} = \frac{i}{\omega}[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}] = -\frac{ik^2}{\omega}\mathbf{E}$$

Inoltre avevo

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \left(\mu\sigma - i\frac{\omega}{v^2}\right)\mathbf{E}$$

da cui

$$\begin{aligned} -\frac{ik^2}{\omega} &= \left(\mu\sigma - i\frac{\omega}{v^2}\right) \implies k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} + i\mu\sigma\omega = \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 + i\frac{\mu\sigma v^2}{\omega}\right) \implies \\ &\implies k = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + i\frac{\mu\sigma v^2}{\omega}} = k_r + ik_I \end{aligned}$$

Anche qui noto che per  $\sigma \rightarrow 0$  riottengo una relazione già vista per le onde elettromagnetiche nel vuoto ( $k = \omega/v$ ). Il segno che compare di fronte a  $k_I$  è una convenzione: se avessimo usato un'onda con fase  $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  avremmo ottenuto  $k = k_r - ik_I$ .

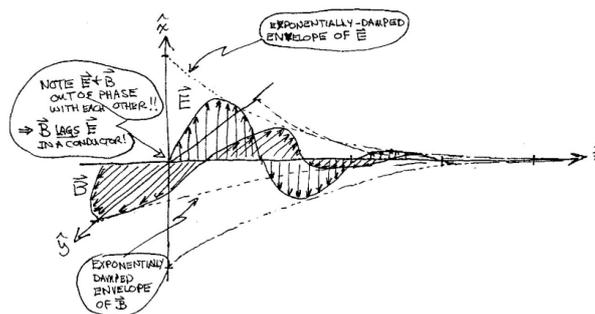
**Assorbimento dell'onda nel metallo** Consideriamo un'onda che si propaga nella direzione delle  $z$  positive e che incontra un metallo per  $z > 0$ :

$$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{i}}, \quad \vec{\mathbf{B}}(z, t) = B_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{j}}$$

Il campo elettrico risulta

$$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} = E_0 e^{i(k_r z + ik_I z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} = (E_0 e^{-k_I z}) e^{i(k_r z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}}$$

L'onda nel metallo ha un'ampiezza decrescente con la profondità (perde energia!). La parte immaginaria di  $k$  descrive l'assorbimento progressivo, dovuto alla perdita di energia per la messa in moto delle cariche. L'energia si trasferisce dall'onda al metallo, si ha il cosiddetto "effetto Joule". Come per le onde in un dielettrico, si definisce il coefficiente di assorbimento  $\mu = 2k_I$ . Così  $I(z) = I_0 e^{-\mu z}$ .

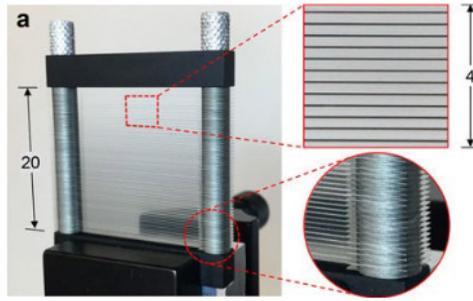


Dalla figura si vede che il campo magnetico è sempre in ritardo rispetto al campo elettrico e che entrambe le onde sono attenuate nel tempo.

## Lezione 19: 2 maggio 2024

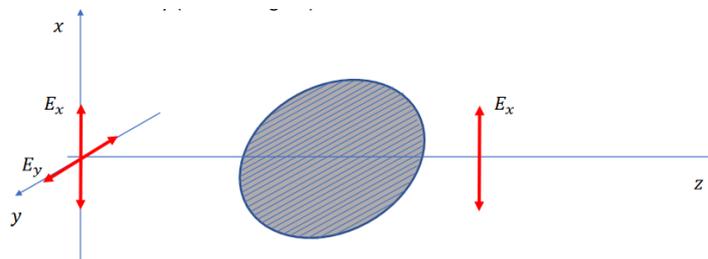
### 4.7.3 Polarizzatori

Finora abbiamo considerato solo metalli con elettroni liberi di muoversi in ogni direzione. Esistono dispositivi in cui gli elettroni sono vincolati a muoversi in una sola direzione, rendendo il mezzo anisotropo. Nella figura si vede un esempio di come ciò può essere realizzato:



Lungo i fili metallici si generano delle correnti (quindi effetto Joule e dispersione di energia), ma verticalmente gli elettroni non si possono muovere. Anche lunghe catene di idrocarburi possono realizzare lo stesso effetto (funzionano così le Polaroid e gli occhiali da sole).

Consideriamo un'onda elettromagnetica generica che si propaga lungo la direzione z con componenti casuali in x e y. Supponiamo di avere un polarizzatore nel piano xy, con le molecole orientate nella direzione y.



Nel polarizzatore si realizza un forte assorbimento della componente y e un minimo di quella x. A valle del polarizzatore l'onda elettromagnetica è polarizzata linearmente lungo x.

**Nota.** Nei polarizzatori viene indicata sempre la direzione di trasmissione del campo elettrico, non la direzione dei fili! I fili sono perpendicolari alla direzione di trasmissione, perché assorbono il campo elettrico disperdendo la sua energia tramite effetto Joule.

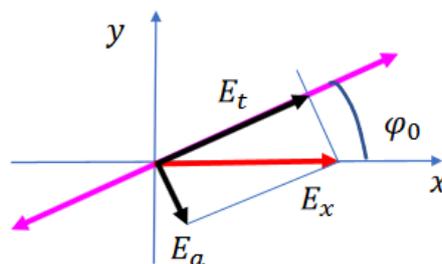
L'intensità di un'onda diminuisce dopo il passaggio attraverso il polarizzatore. Inizialmente si ha

$$I_0 = \left\langle \frac{E_x^2 + E_y^2}{Z} \right\rangle = \left\langle \frac{2E_x^2}{Z} \right\rangle$$

Se il polarizzatore è ideale, il campo elettrico su y viene annullato e il campo elettrico su x non varia, quindi l'intensità diventa

$$I = \left\langle \frac{E_x^2}{Z} \right\rangle = \frac{I_0}{2}$$

Supponiamo invece di avere un'onda già polarizzata in direzione x che si propaga lungo la direzione z. Inoltre supponiamo di avere un polarizzatore nel piano xy, con un asse di trasmissione inclinato di un angolo  $\varphi_0$ :



**Formula (Legge di Malus).** Si ottiene così la legge di Malus:

$$I(\varphi_0) = \left\langle \frac{E_t^2}{Z} \right\rangle = \left\langle \frac{E_x^2 \cos^2(\varphi_0)}{Z} \right\rangle = I_0 \cos^2(\varphi_0)$$

**Nota.** La polarizzazione di questo tipo funziona con qualsiasi tipo di onda, non è specifica delle onde armoniche.

**Mezzi anisotropi** Vogliamo ora produrre polarizzazioni circolari ed ellittiche. Per ottenerle è necessario avere delle onde armoniche. Nella maggior parte dei mezzi dielettrici valgono  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$  e  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  con  $\chi_e$  e  $\epsilon$  sono quantità scalari. Nei mezzi anisotropi queste quantità sono tensori simmetrici di rango 2. La relazione resta lineare, ma il coefficiente di proporzionalità è un tensore. Ne consegue che la velocità di un'onda elettromagnetica dipende dal piano di oscillazione del campo elettrico (non dalla direzione di propagazione dell'onda!), perché l'indice di rifrazione sarà diverso nelle tre direzioni.

$$n = \begin{pmatrix} \epsilon_x / \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y / \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z / \epsilon_0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo un'onda armonica polarizzata incidente su una lamina di materiale anisotropo con  $n_x \neq n_y$ , di spessore  $d$ . Poniamo  $\mathbf{E}(z, t) = E_0 / \sqrt{2} \cos(kz - \omega t)(\hat{i} + \hat{j})$  per  $z < 0$ . Se la lamina è tra 0 e  $d$ , la componente x ha velocità  $v_x c / n_x$  e numero d'onda  $\omega n_x / c$  e subisce uno sfasamento totale  $\Delta\Phi_x = k_x d = \frac{\omega n_x}{c}$  (si ottiene imponendo la continuità in  $z = d$  fra la lamina e l'esterno). Analogamente la componente y ha una velocità  $v_y = \frac{c}{n_y}$  e subisce uno sfasamento  $\Delta\Phi_y = k_y d = \frac{\omega n_y}{c}$ . Quando  $|\Delta\Phi_y - \Delta\Phi_x| = \pi / 2$  si realizzano le condizioni di un'onda polarizzata circolarmente:

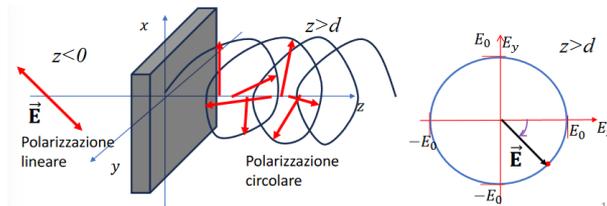
$$\frac{\omega n_x}{c} - \frac{\omega n_y}{c} = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow d = \frac{\lambda}{4(n_x - n_y)}$$

Per questo è detta "lamina a quarto d'onda". Si ottengono così le seguenti descrizioni dell'onda:

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(k(z - d) - \omega t + \Delta\phi_x) / \sqrt{2} \text{ per } z > d$$

$$E_y(z, t) = E_0 \cos(k(z - d) - \omega t + \Delta\phi_x + \pi/2) / \sqrt{2} \text{ per } z > d$$

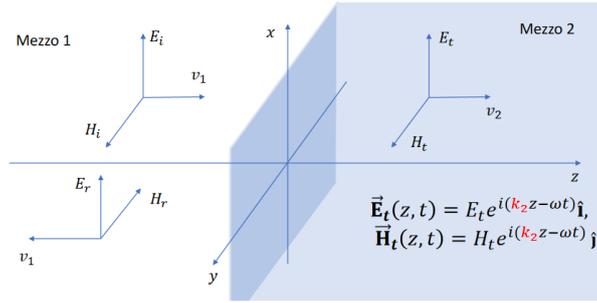
Il campo elettrico si muove quindi "ad elica":



## Lezione 20: 7 maggio 2024

### 4.8 Riflessione e rifrazione

Consideriamo ora il caso di un'onda elettromagnetica che viaggia in un mezzo con una certa impedenza e che incontra un altro mezzo con impedenza diversa. È diverso dal caso su una corda, banalmente perché stiamo lavorando con equazioni alle derivate prime (equazioni di Maxwell). Consideriamo un caso molto semplice con un'onda elettromagnetica monocromatica polarizzata linearmente, due mezzi omogenei (impedenze  $Z_1, Z_2$ ), una superficie di separazione piana tra i due mezzi, l'onda che incide perpendicolarmente rispetto alla superficie (incidenza normale).



Le onde incidenti sono  $\mathbf{E}_i(z, t) = E_i e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}}$  e  $\mathbf{H}_i(z, t) = H_i e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{j}}$ . Si avranno onde riflesse:

$$\mathbf{E}_r(z, t) = E_r e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} \qquad \mathbf{H}_r(z, t) = -H_r e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{j}}$$

dove il segno di  $H_r$  è negativo per avere una terna destrorsa. Si hanno anche onde trasmesse:

$$\mathbf{E}_t(z, t) = E_t e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} \qquad \mathbf{H}_t(z, t) = H_t e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{j}}$$

Ricordo la relazione che sussiste fra  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{E}$  nelle onde elettromagnetiche:

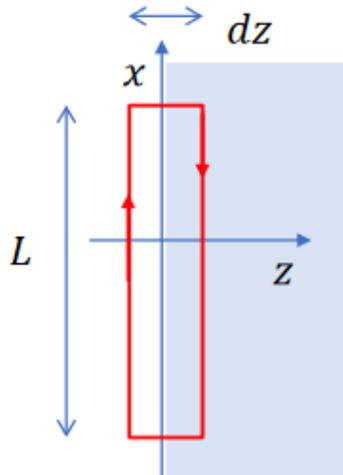
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k}}{\omega \mu} \times \mathbf{E}$$

$$\implies |\mathbf{H}| = \frac{|\mathbf{E}|}{Z}$$

Le impedenze dipendono dall'impedenza del vuoto attraverso l'inverso dell'indice di rifrazione:  $Z_1 = Z_0 / n_1$  e  $Z_2 = Z_0 / n_2$ . Di conseguenza i moduli di  $\mathbf{H}$  ed  $\mathbf{E}$  possono essere collegati così:

$$H_i = n_1 \frac{E_i}{Z_0} \qquad H_r = n_1 \frac{E_r}{Z_0} \qquad H_t = n_2 \frac{E_t}{Z_0}$$

Dobbiamo ora trovare le relazioni fra i campi elettrici.



Attraverso la curva rappresentata nella figura il flusso del campo magnetico tende a zero (l'area tende a zero), quindi la circuitazione del campo elettrico è nulla. Il contributo dei due lati piccoli tende a zero se i lati tendono a zero. Da questo segue che

$$E_i + E_r = E_t$$

Facciamo lo stesso ragionamento per il campo  $\mathbf{H}$ . Non ci sono correnti concatenate e il flusso del campo elettrico attraverso la superficie tende a zero. Da questo segue che la circuitazione del campo  $\mathbf{H}$  è nulla, quindi

$$H_i - H_r = H_t$$

Il segno negativo davanti ad  $H_r$  deriva dal fatto che  $\mathbf{H}$  riflesso è opposto rispetto ad  $\mathbf{H}$  incidente. Ho trovato un sistema di equazioni che mi permette di esplicitare i campi trasmessi e riflessi rispetto al campo incidente.

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ n_1 \frac{E_i}{Z_0} - n_1 \frac{E_r}{Z_0} = n_2 \frac{E_t}{Z_0} \end{cases} &\implies \begin{cases} E_t = E_i + E_r \\ n_1 E_i - n_1 E_r = n_2 E_i + n_2 E_r \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} E_t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_i \\ E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i \end{cases} \end{aligned}$$

Inserendo le impedenze possiamo trovare

**Formula** (Incidenza normale per le onde elettromagnetiche).

$$\begin{cases} E_t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_i \\ E_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} E_i \end{cases} \quad \begin{cases} H_t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} H_i \\ H_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} H_i \end{cases}$$

Queste formule sono state ricavate mantenendo fermo il verso del campo elettrico riflesso e ribaltando  $H$  (infatti al numeratore in  $H_r$  c'è  $Z_2 - Z_1$  e non  $Z_1 - Z_2$  come accadeva nelle onde meccaniche). Se avessimo tenuto fermo il verso del campo  $H$  per il campo riflesso avremmo ottenuto le stesse formule della corda.

**Nota.** Questi risultati valgono anche per onde impulsive e per onde con polarizzazione diversa da quella lineare.

#### 4.8.1 Valutazione energetica

Come nelle onde su corda, l'intensità dell'onda si conserva (è una forma di conservazione dell'energia).

$$\begin{aligned} I_r + I_t &= Z_1 \langle H_r^2 \rangle + Z_2 \langle H_t^2 \rangle = \\ &= Z_1 \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \langle H_i^2 \rangle + Z_2 \left( \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \langle H_i^2 \rangle = Z_1 \left( \frac{Z_2 + Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \langle H_i^2 \rangle \\ &= Z_1 \langle H_i^2 \rangle = I_i \end{aligned}$$

Posso definire ancora i coefficienti di trasmissione e di riflessione:

**Definizione 4.8.1** (Coefficienti di trasmissione e di riflessione).

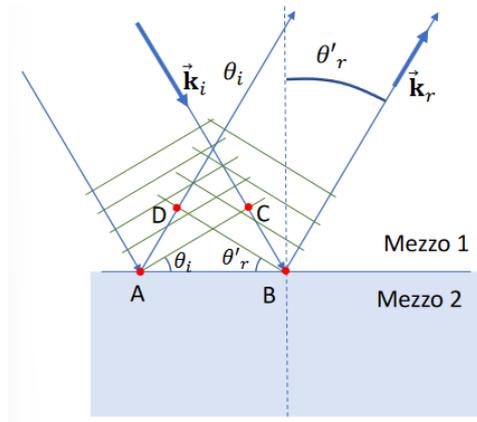
$$T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad R = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

Per definizione  $R + T = 1$ ,  $I_t = T I_i$  e  $I_r = R I_i$ .

#### 4.8.2 Incidenza non normale

Studiamo ora l'aspetto geometrico del passaggio fra due mezzi differenti, ossia come cambiano i versori che descrivono la direzione dell'onda.

**Riflessione** Si fa riferimento alla seguente figura e si sfrutta il principio di Huygens-Fresnel:



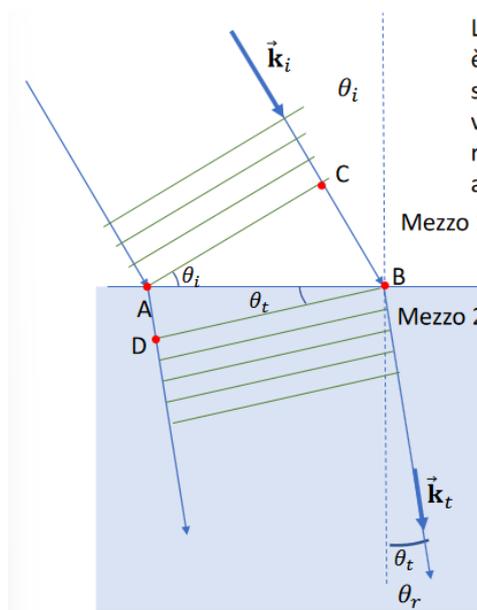
Nel tempo in cui il punto C arriva in B, il punto A dello stesso fronte d'onda è arrivato in D (siamo sempre nel mezzo 1). I triangoli ABC e ABD sono entrambi retti per costruzione, perché sono dati dall'intersezione di un fronte d'onda con la retta di propagazione dell'onda. Inoltre hanno due lati uguali (AB in comune e AD=BC), quindi hanno anche gli stessi angoli. Segue che

$$\theta'_r = \theta_i$$

Di conseguenza  $\mathbf{k}_i$ ,  $\mathbf{k}_r$  e la normale alla superficie stanno nello stesso piano, che è detto "piano d'incidenza".

**Nota.** Abbiamo parlato di riflessione nel caso di onde elettromagnetiche, ma il ragionamento si applica identico a tutti gli altri tipi di onde perché si basa esclusivamente sul principio di Huygens-Fresnel e caratteristiche generiche delle onde.

**Rifrazione** Consideriamo ora il caso della rifrazione, ossia la trasmissione con un angolo di incidenza diverso da zero rispetto alla normale.



Sia  $t_{CB} = \overline{CB} / v_1$  il tempo che ci mette il punto C ad arrivare a B. Nello stesso tempo il punto A si muove in D:  $t_{AD} = \overline{AD} / v_2 = t_{CB}$ . So anche che  $\overline{CB} = \overline{AB} \sin(\theta_i)$  e  $\overline{AD} = \overline{AB} \sin(\theta_t)$ , quindi trovo

$$\frac{\overline{AD}}{v_2} = \frac{\overline{CB}}{v_1} \implies \frac{\overline{AB} \sin(\theta_t)}{v_2} = \frac{\overline{AB} \sin(\theta_i)}{v_1} \implies \frac{n_2 \sin(\theta_t)}{c} = \frac{n_1 \sin(\theta_i)}{c}$$

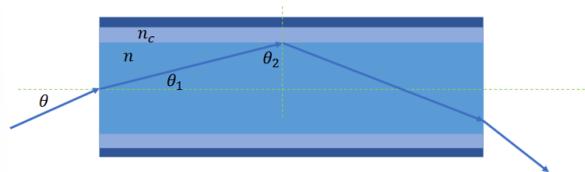
Così otteniamo la legge di Snell per la rifrazione:

**Formula** (Legge di Snell).

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_r)$$

Passando da un mezzo con indice di rifrazione basso ad uno con indice di rifrazione alto ( $n_1 < n_2$ ) la direzione dell'onda si avvicina alla normale, quindi  $\theta_r < \theta_i$ . Viceversa, passando da un mezzo con indice di rifrazione alto ad uno con indice di rifrazione basso ( $n_1 > n_2$ ) la direzione dell'onda si allontana dalla normale, ossia  $\theta_r > \theta_i$  (non sempre è possibile!). Essendo  $\sin(\theta_r) = \frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_i)$ , se  $\sin(\theta_i) > \frac{n_2}{n_1}$  non esiste alcun  $\theta_r$  che soddisfi l'equazione. Sono nel caso della *riflessione totale*. Non avviene la rifrazione, ma avviene solo la riflessione. Succede ad esempio in piscina buttandosi sott'acqua e guardando verso l'alto.

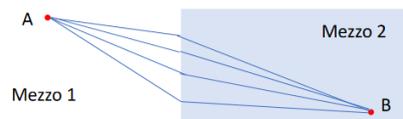
**Applicazione: fibra ottica** Le fibre ottiche sfruttano il fenomeno della riflessione totale. All'interno c'è il core con indice  $n$ , subito fuori c'è il cladding con indice  $n_c$  e a protezione c'è una guaina protettiva non trasparente.



Si definisce l'apertura numerica della fibra  $NA = \sin(\theta_{max} = \sqrt{n^2 - n_c^2})$  dove  $\theta_{max}$  è il massimo angolo di incidenza per cui si ha riflessione totale all'incidenza sul cladding. Per angoli più piccoli (rispetto alla normale) si ha anche rifrazione, ma è possibile evitare che succeda. Questo mi permette di curvare la luce!

**Applicazione: prisma** Su una lastra di vetro a facce parallele un raggio che entra all'angolo  $\theta$  esce con lo stesso angolo indipendentemente dall'indice di rifrazione del vetro (si vede applicando la legge di Snell). Nel prisma le facce non sono parallele, ne consegue che l'angolo di uscita è una funzione dell'indice di rifrazione e dell'angolo incidente:  $\theta_f = f(n, \theta_i)$ . Poiché  $n = n(\lambda)$ , ne consegue che un fascio di luce bianca si separa in uno spettro di colori. È lo stesso fenomeno fisico che accade nelle gocce d'acqua e che permette la formazione dell'arcobaleno.

**Principio di Fermat** Il principio di Fermat generalizza la legge di Snell e la formalizza in una sorta di principio di minima azione. Tra tutti i possibili cammini che un raggio di luce può percorrere per andare da un punto a un altro, esso segue il cammino che richiede il tempo più breve.



Il tempo necessario ad andare dal punto A al punto B è

$$T = \int \frac{dl}{v} = \frac{1}{c} \int n dl$$

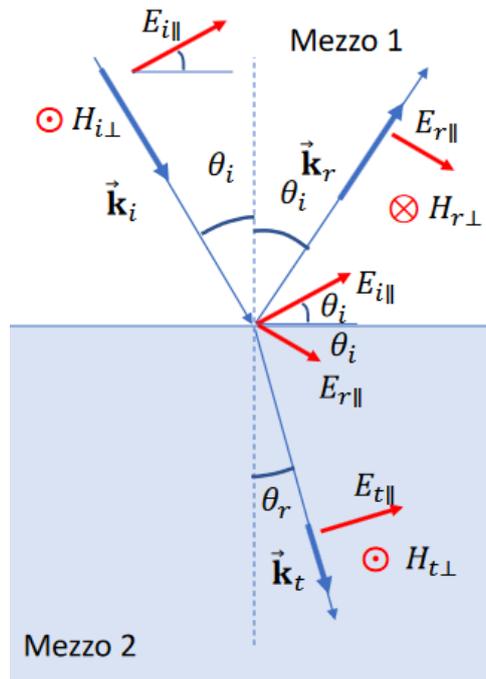
Minimizzare il tempo significa minimizzare il percorso ottico:  $L_{ott} \int n dl$ .

**Esercizio.** Per casa, prova a ottenere la legge di Snell a partire dal principio di Fermat.

## Lezione 21: 8 maggio 2024

### 4.8.3 Formule di Fresnel

Oggi studiamo la relazione fra polarizzazione e passaggio fra due mezzi ottici distinti. Supponiamo che la polarizzazione non cambi al passaggio fra due mezzi e nella riflessione (trascuriamo materiali con molecole chirali e altre stranezze).



Se l'incidenza dell'onda non è normale, allora nello spazio esiste un piano definito dalla normale alla superficie e dalla direzione di moto dell'onda. La componente del campo elettrico che sta su questo piano ha proprietà di riflessione e rifrazione diverse da quelle della componente normale a tale piano (per ora studiamo la componente del campo elettrico parallela al piano d'incidenza e insieme la componente perpendicolare del campo magnetico). I versi in figura sono stati messi coerentemente con quanto fatto ieri per  $\theta_i \rightarrow 0$ , sia per il campo elettrico che per il campo magnetico (N.B.: queste sono tutte scelte arbitrarie!). Le considerazioni fatte ieri sulla circuitazione valgono anche in questo caso:

$$E_{i||} \cos(\theta_i) + E_{r||} \cos(\theta_i) = E_{t||} \cos(\theta_r)$$

Il campo magnetico invece è perpendicolare al piano incidente e parallelo alla superficie di separazione, quindi ho la relazione già studiata:

$$H_{i\perp} - H_{r\perp} = H_{t\perp} \implies n_1 E_{i||} - n_1 E_{r||} = n_2 E_{t||}$$

Pongo

$$\alpha = \frac{\cos(\theta_r)}{\cos(\theta_i)} \qquad \beta = \frac{n_2}{n_1}$$

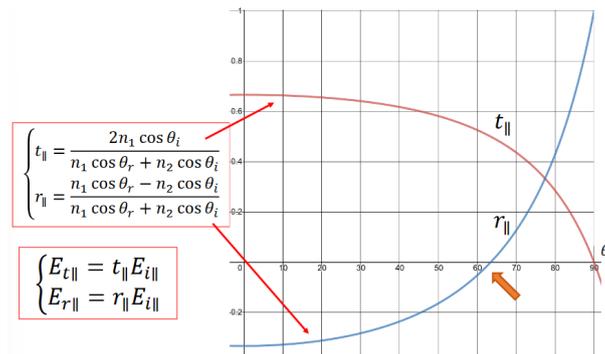
da cui si ha

$$\begin{cases} E_{i||} + E_{r||} = \alpha E_{t||} \\ E_{i||} - E_{r||} = \beta E_{t||} \end{cases}$$

Si ottengono così le formule di Fresnel per il campo elettrico parallelo:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a & E_{i||} + E_{r||} = \alpha E_{t||} \\ b & E_{i||} - E_{r||} = \beta E_{t||} \end{cases} \qquad \text{con } \alpha = \frac{\cos \theta_r}{\cos \theta_i}, \quad \beta = \frac{n_2}{n_1}, \\ & \begin{cases} a+b & 2E_{i||} = (\alpha + \beta) E_{t||} \\ a-b & 2E_{r||} = (\alpha - \beta) E_{t||} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{t||} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{i||} \\ E_{r||} = \frac{\alpha - \beta}{2} E_{t||} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{i||} \end{cases} \\ & \boxed{\begin{cases} E_{t||} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i} E_{i||} \\ E_{r||} = \frac{n_1 \cos \theta_r - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_r + n_2 \cos \theta_i} E_{i||} \end{cases}} \qquad \text{Formule di Fresnel per } E_{||} \\ & \text{Ma per Snell } n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \implies \cos \theta_r = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2} \end{aligned}$$

Disegniamo quello che sta accadendo:

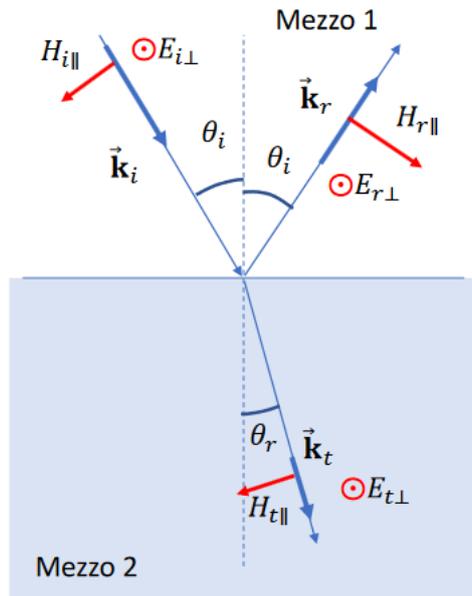


Sapendo che  $I = 1/Z\langle E^2 \rangle$  e ponendo  $R_{\parallel} = r_{\parallel}^2$ , si ottiene immediatamente che  $I_{r\parallel} = R_{\parallel} I_{i\parallel}$ . Posto invece  $T_{\parallel} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$ , si ha  $I_{t\parallel} = T_{\parallel} I_{i\parallel} \cos(\theta_i) / \cos(\theta_r)$ .

$$I_{i\parallel} \cos \theta_i = I_{r\parallel} \cos \theta_i + I_{t\parallel} \cos \theta_r$$

Non si conserva l'intensità. Per fortuna la fisica è salva, perché l'importante è che si conservi l'energia. L'intensità non si conserva perché varia la superficie su cui è distribuita la potenza dell'onda.

Studiamo ora il caso del campo elettrico perpendicolare al piano d'incidenza e il campo magnetico parallelo al piano d'incidenza.



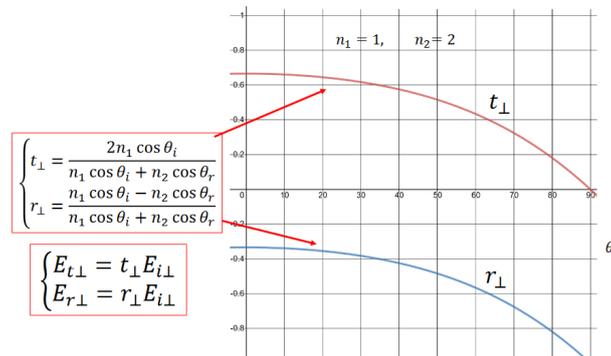
Per la continuità del campo elettrico usiamo la formula dell'incidenza normale:  $E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp}$ . Per il campo magnetico invece vale un ragionamento analogo a prima, da cui si ottiene  $H_{i\parallel} \cos(\theta_i) - H_{r\parallel} \cos(\theta_i) = H_{t\parallel} \cos(\theta_r)$ . Pongo  $\alpha, \beta$  come prima e trovo

$$\begin{cases} E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp} \\ E_{i\perp} - E_{r\perp} = \alpha\beta E_{t\perp} \end{cases}$$

Svolgendo nuovamente i calcoli come prima troviamo le formule di Fresnel per il campo elettrico perpendicolare:

$$\begin{aligned}
 & a \begin{cases} E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp} \\ E_{i\perp} - E_{r\perp} = \alpha\beta E_{t\perp} \end{cases} \quad \text{con } \alpha = \frac{\cos \theta_r}{\cos \theta_i}, \quad \beta = \frac{n_2}{n_1} \\
 & a+b \begin{cases} 2E_{i\perp} = (1 + \alpha\beta)E_{t\perp} \\ 2E_{r\perp} = (1 - \alpha\beta)E_{t\perp} \end{cases} \quad \begin{cases} E_{t\perp} = \frac{2}{(1 + \alpha\beta)} E_{i\perp} \\ E_{r\perp} = \frac{(1 - \alpha\beta)}{2} E_{t\perp} = \frac{(1 - \alpha\beta)}{(1 + \alpha\beta)} E_{i\perp} \end{cases} \\
 & \begin{cases} E_{t\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} E_{i\perp} \\ E_{r\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} E_{i\perp} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Formule di Fresnel per } E_{\perp} \\ \text{Ma per Snell} \\ n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \\ \rightarrow \cos \theta_r = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2} \end{array}
 \end{aligned}$$

Disegniamo quello che sta succedendo:



Anche sull'intensità facciamo lo stesso identico calcolo di prima. Chiamiamo  $R_{\perp} = r_{\perp}^2$  e  $T_{\perp} = \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$ . Si ha che  $I_{r\perp} = R_{\perp} I_{i\perp}$  e  $I_{t\perp} = T_{\perp} I_{i\perp} \frac{\cos(\theta_i)}{\cos(\theta_r)}$ , per cui risulta:

$$I_{i\perp} \cos \theta_i = I_{r\perp} \cos \theta_i + I_{t\perp} \cos \theta_r$$

Stesso discorso di prima sull'energia.

Caso per caso deve capire quale è la componente perpendicolare e quale la componente parallela dell'onda incidente.

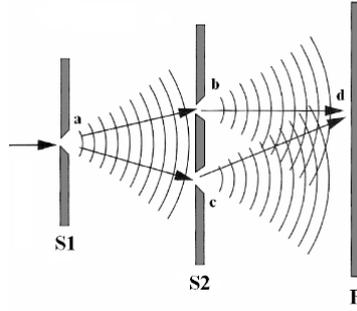
**Angolo di Brewster** Abbiamo visto che c'è un angolo per cui  $r_{\parallel} = 0$ . Questo equivale a dire che  $n_1 \cos(\theta_r) = n_2 \cos(\theta_i)$ . Dalla legge di Snell, questa relazione è verificata quando  $\theta_i + \theta_r = \frac{\pi}{2}$ . In questo caso  $\theta_i = \theta_B$  "angolo di Brewster". La luce riflessa è totalmente polarizzata.

**Formula (Angolo di Brewster).** Dall'equazione che definisce l'angolo di Brewster e dalla legge di Snell si ricava che:

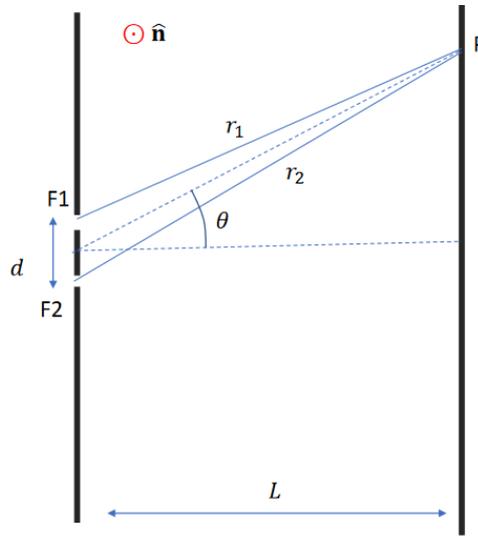
$$\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1}$$

## 4.9 Interferenza

Questo argomento è particolarmente importante perché ci permette di capire che cosa sia la luce. C'erano due grandi gruppi: i sostenitori della teoria corpuscolare e quelli della teoria ondulatoria. L'idea di Young era che se la luce è un'onda allora deve mostrare i comportamenti tipici delle onde, che non possono essere spiegati dalla teoria corpuscolare: diffrazione e interferenza.



Viene prodotta luce monocromatica, diffusa attraverso lo schermo S1 e poi divisa in due sorgenti secondarie coerenti dallo schermo S2. Il risultato osservato sono delle figure di interferenza sullo schermo di osservazione F. Sembra che gli ondulatori avessero ragione (plot twist nel 1900). La stessa cosa succede anche con gli elettroni e anche mandando un fotone alla volta. La meccanica quantistica spiega questo comportamento. Rimaniamo coi piedi per terra e studiamo l'interferenza alla Young.



I campi in uscita dalle fenditure sono  $\mathbf{E}_1(F1) = E_0 e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{n}}$  e  $\mathbf{E}_2(F2) = E_0 e^{i\omega t} \hat{\mathbf{n}}$ , mentre in P sono  $\mathbf{E}_1(P) = E'_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}$  e  $\mathbf{E}_2(P) = E'_0 e^{i(kr_2 - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}$ . Per semplicità ipotizziamo che gli angoli siano piccoli e che quindi siano uguali le ampiezze (vanno come  $1/r$ ).

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}(P) &= \vec{\mathbf{E}}_1(P) + \vec{\mathbf{E}}_2(P) = E'_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} \hat{\mathbf{n}} + E'_0 e^{i(kr_2 - \omega t)} \hat{\mathbf{n}} \\ &= E'_0 e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{n}} (e^{ikr_1} + e^{ikr_2}) = \\ &= E'_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} \hat{\mathbf{n}} (1 + e^{ik(r_2 - r_1)}) \end{aligned}$$

Per angoli piccoli posso approssimare  $r_2 - r_1 = d \sin(\theta)$ . Lo sfasamento fra i due raggi è  $\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = kd \sin(\theta)$ . Questo vale se lo schermo è molto lontano e se gli angoli sono piccoli. Si hanno due casi estremi:

**Interferenza costruttiva** Si ha campo massimo se  $\Delta\varphi = 2n\pi$ , da cui  $\sin(\theta) = \frac{n\lambda}{d}$  con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\infty$ . Il campo è doppio e l'intensità quadruplica.

**Interferenza distruttiva** Si ha campo minimo per  $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi \implies \sin(\theta) = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{d}$ . Il campo è nullo e l'intensità anche.

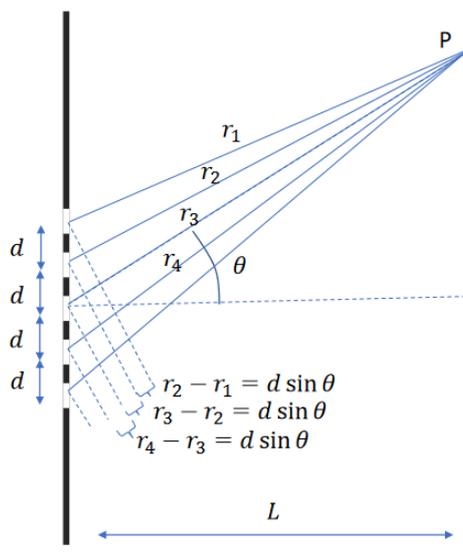
Per l'intensità in generale si ritrova la formula dell'interferenza delle onde sonore:

$$I(\Delta\varphi) = I_0 |1 + e^{i\Delta\varphi}|^2 = 4 I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 4 I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta \right)$$

Osserviamo che  $\langle I(\Delta\varphi) \rangle = 2I_0$ , quindi l'intensità si conserva. Però l'energia appare redistribuirsi sullo schermo, solo con zone di accumulo e zone di perdita.

**Fattore di controllo** Ciò che controlla l'effetto dell'interferenza è il rapporto  $d/\lambda$ . Per  $d \ll \lambda$  sullo schermo si ha un solo massimo di interferenza, si ha una diffusione della luce. Per  $d \gg \lambda$  non ho più sorgenti puntiformi F1 ed F2, i raggi non sono più colineari e quindi i calcoli fatti non valgono. Si possono avere problemi di coerenza e non si vede più la figura d'interferenza. Per  $d > \lambda$  ma  $d$  piccolo vale l'approssimazione delle sorgenti puntiformi F1 ed F2 e si riesce a osservare il fenomeno di interferenza.

### 4.9.1 Interferenza con più sorgenti



Consideriamo un sistema con  $N$  sorgenti monocromatiche, coerenti ed uguali, distribuite a distanze fisse su uno schermo. Il campo in  $P$  è dato da

$$\vec{E}(P) = \sum_{i=1}^N E'_0 e^{i(kr_i - \omega t)} \hat{n} = E'_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} \hat{n} \sum_{i=1}^N e^{ik(r_i - r_1)}$$

Opero la stessa approssimazione di prima: piccoli angoli, quindi  $r_m = r_{m-1} + d \sin(\theta)$  e in  $P$  considero uguali le  $N$  ampiezze. Pongo  $\varphi = kd \sin(\theta)$  e ottengo che

$$\sum_{i=1}^N e^{ik(r_i - r_1)} = 1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{i(N-1)\varphi}$$

È un pezzo di serie geometrica, quindi

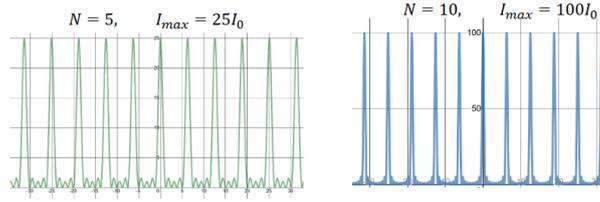
$$\sum_{i=1}^N e^{ik(r_i - r_1)} = 1 + q + q^2 + q^3 \dots + q^{(N-1)} = \frac{1 - q^N}{1 - q} = \frac{1 - e^{Ni\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{e^{Ni\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}$$

$$= \frac{e^{\frac{N}{2}i\varphi}}{e^{\frac{i\varphi}{2}}} \frac{e^{\frac{N}{2}i\varphi} - e^{-\frac{N}{2}i\varphi}}{e^{\frac{i\varphi}{2}} - e^{-\frac{i\varphi}{2}}} = \frac{e^{\frac{N}{2}i\varphi}}{e^{\frac{i\varphi}{2}}} \frac{\sin(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$$

Passando ora all'intensità, detta  $I_0$  l'intensità di una singola fenditura, si ha:

**Intensità:**  $I(\Delta\varphi) = I_0 \left| \frac{e^{\frac{N}{2}i\varphi}}{e^{\frac{i\varphi}{2}}} \frac{\sin(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \right|^2 = I_0 \frac{\sin^2(\frac{N}{2}\varphi)}{\sin^2(\frac{\varphi}{2})} = I_0 \frac{\sin^2(\frac{N^2}{2}d \sin \theta)}{\sin^2(\frac{1}{2}d \sin \theta)}$

Se  $N = 5$ ,  $I_{max} = 25I_0$ . Se  $N = 10$ ,  $I_{max} = 100I_0$ . Si osservano dei minimi e massimi, con massimi principali di intensità proporzionale a  $N^2$  e massimi e secondari. I minimi sono sempre ad intensità nulla e quasi equispaziati. La larghezza dei massimi principali dipende da  $N$ .



Si hanno minimi per  $N\frac{\pi}{\lambda}d\sin(\theta) = n\pi$ , cioè per  $\sin(\theta) = \frac{n\lambda}{Nd}$  con  $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \infty$  tranne quando  $n = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ . In tali casi infatti il denominatore vale 0 e la formula per l'intensità ha espressione indeterminata. Lo studio del limite porta a verificare che in questi casi si hanno massimi principali, ossia quando  $\frac{\pi}{\lambda}d\sin(\theta) = m\pi$  (come per l'interferenza con due fenditure!). Nell'ipotesi di piccoli angoli possiamo stimare la larghezza a metà altezza del picco come

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{\min, n=\pm 1} - \theta_{\min, n=\pm 1}}{2} = \theta_{\min, n=\pm 1} = \frac{\lambda}{Nd} \quad \Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}$$

## Lezione 22: 9 maggio 2024

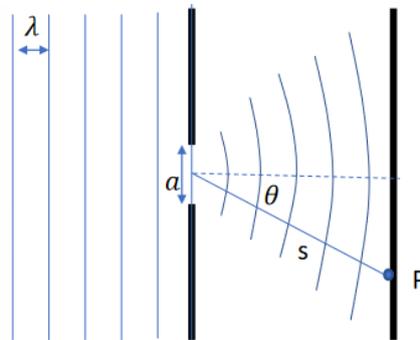
**Reticolo** Un reticolo è un dispositivo caratterizzato da un numero  $N$  di fenditure grandi. Detto  $N'$  il numero di fenditure per unità di lunghezza, si ha  $d = 1 / N'$ . Per il reticolo si definisce la dispersione, che è la capacità di deviare la luce al variare della lunghezza d'onda:  $\mathcal{D} = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos(\theta_{max})}$  usando la formula dei massimi. Si definisce anche il potere risolutivo  $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  come la capacità di vedere come separati massimi a lunghezze d'onda molto vicine. Quindi non conta solo la distanza fra i picchi ma anche quanto è largo un picco. Considerato  $d\theta \approx \Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}$  come distanza angolare fra i picchi, otteniamo

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{Nm}{\cos(\theta_{max})} \approx Nm$$

**Nota.** Nelle slide ci sono esempi di applicazioni dell'interferenza con film sottili (L30).

### 4.10 Diffrazione

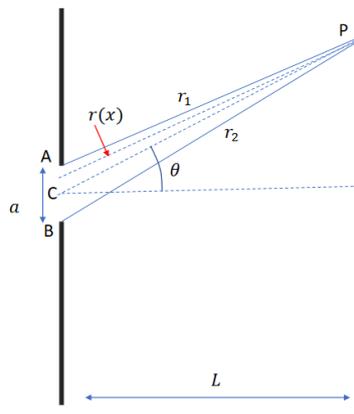
Il fenomeno fisico alla base del fenomeno della diffrazione è lo stesso dell'interferenza. Si parla di diffrazione quando ho un numero "infinito" di sorgenti distribuite su un'apertura. Si applica il principio di Huygens-Fresnel a un'onda monocromatica piana che incide su una fenditura di larghezza  $a$ :



Ci sono condizioni più semplici per il calcolo della figura di diffrazione e altre più complicate. Se lo schermo su cui si osserva la figura è vicino all'apertura si parla di diffrazione in regime di Fresnel, se è lontano si parla di regime di Fraunhofer e si usa l'approssimazione per angoli piccoli. Usiamo la descrizione matematica del principio di Huygens-Fresnel:

$$\xi(x, y, z, t) = c \int_{\Sigma} \xi(x', y', 0, t - \frac{s}{v}) \frac{e^{iks}}{s} \frac{1 + \cos\theta}{2} dx' dy'$$

Ci poniamo in questa situazione:



In prima approssimazione considero l'onda perpendicolare alla fenditura, quindi il campo elettrico è uniforme sull'apertura:  $\mathbf{E}(x) = E_0 e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{n}}$ . In prima approssimazione il campo in P è dato dalla sovrapposizione di tutti i campi provenienti dai diversi punti dell'apertura:  $\mathbf{E}(P) = C \int E_0' e^{i(kr(x) - \omega t)} dx$ . Per angoli piccoli posso scrivere  $r_2 - r_1 = a \sin(\theta)$ , quindi la differenza di fase fra i due raggi è dovuta alla differenza di cammino ottico:  $\Delta\varphi = ka \sin(\theta)$ .

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}(P) &= C' \int e^{i(kr(x) - \omega t)} dx = C' \int e^{i(kr_1 - \omega t + kr(x) - kr_1)} dx \\ &= C' e^{i(kr_1 - \omega t)} \int e^{i\varphi(x)} dx \quad \text{con } \varphi(x) = k(r(x) - r_1) \end{aligned}$$

Consideriamo il caso particolare in cui  $\Delta\varphi = \varphi(B) - \varphi(A) = ka \sin(\theta) = 2\pi$ . L'integrale è fatto su tutte le fasi intermedie fra 0 e  $2\pi$ , quindi è nullo. Ne consegue che  $\mathbf{E}(P^*) = 0$ . Abbiamo trovato dei minimi di intensità:

$$\sin(\theta_{min}) = n \frac{\lambda}{a} \quad \text{con } n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\infty$$

**Nota.** Si noti che nell'interferenza la stessa condizione si applica ai **massimi**.

Si esclude il caso  $n = 0$  perché in tal caso tutte le onde arrivano in fase sullo schermo e quindi si ha interferenza costruttiva. Calcoliamo più precisamente l'intensità (applicando comunque delle approssimazioni):

$$E(P, t) \approx C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_0 e^{-i\omega t} \frac{e^{iks}}{s} dx$$

Sia  $s_0 = r_0$  la distanza tra C e P. Sia r la distanza di un punto di ascissa x generica con il punto P. Si ha che  $s(x) = r_0 - x \sin(\theta)$ . Al numeratore la variabilità di s con x è importante, mentre al denominatore è trascurabile.

$$\begin{aligned} E(P, t) &\approx C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_0 e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr_0 - ikx \sin \theta}}{r_0} dx \approx CE_0 \frac{e^{i(kr_0 - \omega t)}}{r_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikx \sin \theta} dx \\ E(P, t) &= CE_0 \frac{e^{i(kr_0 - \omega t)}}{r_0} \left[ \frac{e^{-ikx \sin \theta}}{-ik \sin \theta} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = 2CE_0 \frac{e^{i(kr_0 - \omega t)}}{kr_0 \sin \theta} \sin\left(\frac{ka}{2} \sin \theta\right) \end{aligned}$$

Sia  $\alpha = ka \sin(\theta)$  lo sfasamento dei raggi estremi.

$$E(P, t) = 2CE_0 \frac{e^{i(kr_0 - \omega t)}}{kr_0 \sin \theta} \sin\left(\frac{\alpha}{2} \sin \theta\right) = E_{max}(t) \frac{\sin \frac{\alpha/2}{\alpha/2}}$$

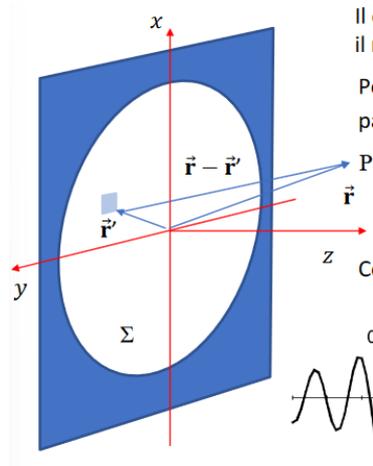
Di conseguenza si ha l'espressione dell'intensità rispetto all'angolo:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{ka \sin(\theta)}{2}\right)}{\left(\frac{ka \sin(\theta)}{2}\right)^2}$$

La distanza fra i due minimi vicini è  $\Delta\theta = 2\lambda / a$ , quindi la larghezza del massimo centrale a circa metà altezza è  $\Delta\theta = \lambda / a$ .

### 4.10.1 Diffrazione da foro circolare

Consideriamo un foro circolare di diametro  $D$  su uno schermo e un'onda armonica piana incidente normalmente.



In regime di Fraunhofer è risolvibile, in regime di Fresnel è necessario affidarsi a un computer. Posto  $\alpha = \frac{kD}{2} \sin(\theta)$  lo sfasamento tra un raggio che parte dal centro e uno dal bordo, si ha

$$I(\theta) = I_0 \frac{J_1^2(\alpha)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = 4I_0 \frac{J_1^2\left(\frac{kD \sin \theta}{2}\right)}{\left(\frac{kD \sin \theta}{2}\right)^2}$$

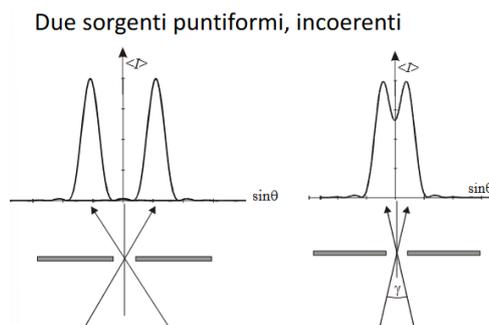
dove  $J_1(\alpha)$  è una funzione di Bessel di ordine 1. Il primo minimo si ottiene a  $\sin(\theta) = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ , quelli successivi non sono equispaziati (la funzione di Bessel non è periodica). Applichiamo quanto trovato a un occhio umano. Se guardiamo una sorgente puntiforme monocromatica attraverso un buco di uno spillo ( $D \approx 0.5 \text{ mm}$ ), sulla retina si forma la figura di diffrazione:

$$2\theta \approx 2 \sin \theta = 2 \cdot 1,22 \cdot \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 2,44 \text{ mrad} \approx 9'$$

**Principio di Babinet** In regime di Fraunhofer, la figura di diffrazione prodotta da un disco opaco di diametro  $D$  è identica a quella di una apertura circolare di diametro  $D$  prodotta su uno schermo opaco.

**Bright spot** Poisson era un sostenitore della teoria corpuscolare e sosteneva che, se fosse stata vera la teoria ondulatoria, allora dietro ad un disco opaco si sarebbe dovuto vedere un punto illuminato al centro dell'ombra anche in regime di Fresnel. Plot twist: c'è davvero.

**Potere separatore** Se ho due sorgenti puntiformi incoerenti (quindi no interferenza), devo avere un potere separatore sufficiente perché il massimo di una delle due intensità sia nel punto di minimo dell'altra.



Si definisce separazione  $\gamma_R = 1,22 \frac{\lambda}{D}$  e potere separatore (o risolutivo, o risoluzione):  $\frac{1}{\gamma_R} = \frac{D}{1,22\lambda}$ .  
Nell'occhio umano si ha

$$\gamma_R = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,3 \text{mrad} \approx 1'$$

# Capitolo 5

## Ottica geometrica

### Lezione 23: 13 maggio 2024

L'ottica geometrica si occupa di quali sono i sistemi e le regole con cui si formano le immagini di oggetti a valle di sistemi ottici. Esiste anche un'ottica "non geometrica" che si occupa solo di massimizzare l'intensità di un segnale luminoso a valle di sistemi ottici. Per la lezione di oggi serviranno alcune definizioni:

**Oggetto (O)** : è un corpo puntiforme o esteso che emette luce o che diffonde la luce di una sorgente. È detto "reale" quando i raggi partono da un punto (es.: oggetto fisico). L'oggetto potrebbe anche essere immagine di un sistema ottico e in tal caso si parla di oggetto virtuale.

**Strumento ottico** : sistema che raccoglie i raggi uscenti da un oggetto e ne modifica la loro direzione.

**Immagine (I)** : figura dell'oggetto realizzata attraverso i raggi deviati dagli strumenti ottici. È detta "reale" se i raggi deviati dallo strumento ottico convergono in un punto, mentre è detta "virtuale" se convergono i prolungamenti dei raggi (es.: specchio).

Gli strumenti ottici che studieremo sono "strumenti ottici stigmatici": i raggi generati da un punto di un oggetto convergono in un punto dell'immagine e i due punti sono detti "punti coniugati". Si ha uno strumento "astigmatico" quando non vi è corrispondenza biunivoca tra punto oggetto e punto immagine.

Si distinguono anche diversi casi di superfici:

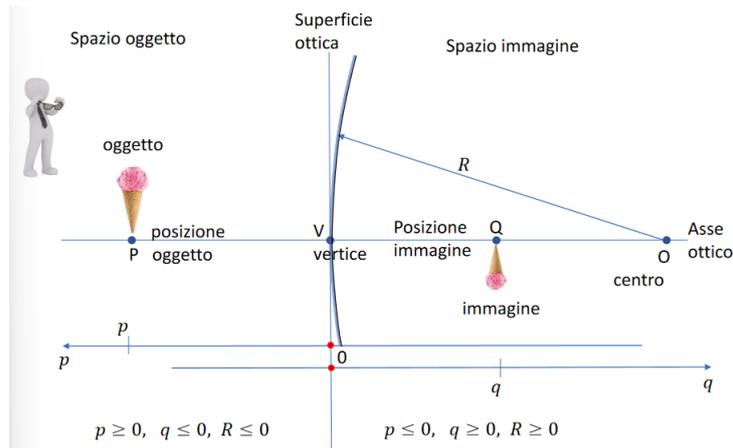
**Superficie catottica** o specchio, quando il fenomeno che si realizza primariamente è quello della riflessione.

**Superficie diottrica** o diottro, quando il fenomeno che si realizza primariamente è quello della rifrazione.

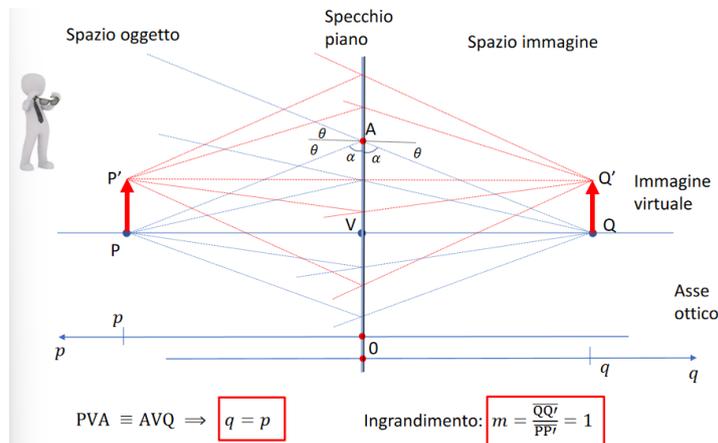
Per gli specchi la legge fisica è particolarmente semplice ( $\theta_i = \theta_r$ ) e non dipende dalla pulsazione. Per i diottri è più complicata perché dipende anche dalla pulsazione/lunghezza d'onda. Questo fenomeno è detto "cromatismo" delle superfici diottriche. Si parla di "acromatismo" quando il sistema ottico è studiato in modo da minimizzare questo effetto.

### 5.1 Specchi

Consideriamo superfici approssimabili come parte di sfera. Per convenzione il raggio  $R$  è positivo se la curvatura è interna allo spazio immagine, mentre è negativo se la curvatura è interna allo spazio oggetto. Faremo riferimento alla seguente figura:



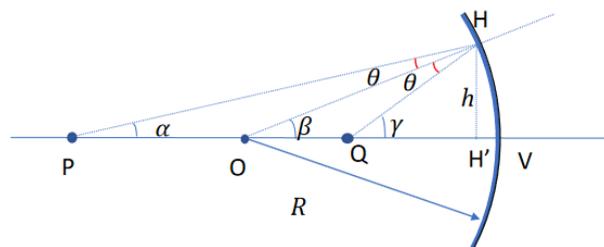
Facendo tendere  $O \rightarrow \infty$ , lo specchio diventa uno specchio piano. I raggi che partono da P nello spazio oggetto e si riflettono sullo specchio piano, se prolungati, convergono nel punto Q appartenente allo spazio immagine. Quindi lo specchio è una superficie stigmatica. Introducendo un altro punto P' si nota che le distanze vengono mantenute dallo specchio piano:



Consideriamo ora una porzione di superficie sferica a specchio. Se è convessa,  $R > 0$ , se è concava  $R < 0$ . Per costruire le immagini si tracciano alcuni raggi particolari: paralleli all'asse ottico, passanti per il vertice, passanti per centri di curvatura, fuochi, ecc... Nelle superfici stigmatiche questi raggi che partono dal punto P convergono (se prolungati) in un punto Q coniugato a P.

### 5.1.1 Specchio concavo

Studiamo la seguente figura:



Osservando la figura si ottiene che  $\alpha + \theta = \beta$ ,  $\beta + \theta = \gamma$ , da cui  $\alpha + \gamma = 2\beta$ . Approssimiamo per angoli piccoli: siano  $\tan \alpha = HH'/PH' \Rightarrow \alpha \approx \frac{h}{p}$ ,  $\tan \beta = HH'/OH' \Rightarrow \beta \approx \frac{h}{|R|} = -\frac{h}{R}$ ,  $\tan \gamma = HH'/QH' \Rightarrow \gamma \approx \frac{h}{|q|} = -\frac{h}{q}$  dove i cambi di segno sono dovuti al fatto che siamo nello spazio

oggetto e che lo specchio è concavo. Otteniamo quindi

$$\alpha + \gamma = 2\beta \implies \frac{h}{p} - \frac{h}{q} = -\frac{2h}{R}$$

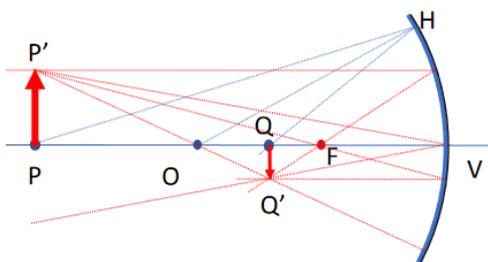
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} := -\frac{1}{f}$$

**Definizione 5.1.1 (Fuoco dello specchio).** Nella formula appena scritta si è definito il "fuoco" dello specchio:

$$f = \frac{R}{2}$$

Si avrà  $f < 0$  per uno specchio concavo e  $f > 0$  per uno specchio convesso.

Il fuoco ha la proprietà di essere il punto in cui convergono i raggi generati da punti con  $p \rightarrow +\infty$ . Questi punti dividono lo spazio in quattro parti: per P a sinistra di O, Q sarà tra O ed F; per P tra O e F, Q sarà a sinistra di O; per P tra F e V, Q sarà a destra di V; per P a destra di V, Q sarà tra F e V. Studiamo ora l'ingrandimento dovuto a uno specchio concavo di un oggetto a sinistra di O:



VPP' e VQQ' sono triangoli simili, quindi l'ingrandimento è  $m = \frac{QQ'}{PP'} = \frac{|q|}{|p|} = -\frac{q}{p}$ . L'immagine è reale, ma è rovesciata. Se ora l'oggetto è tra F e V, la sua immagine sarà virtuale nello spazio immagine. Inoltre sarà ingrandita e diritta. Facendo il disegno si ricava facilmente che

$$m = \frac{QQ'}{PP'} = \frac{q}{p}$$

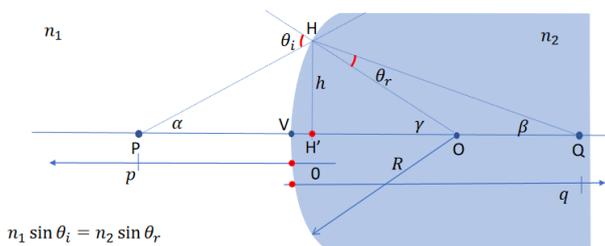
Questa costituisce da ora la definizione di ingrandimento. Si avrà  $m > 0$  per un'immagine dritta,  $m < 0$  per un'immagine rovesciata.

### 5.1.2 Specchio convesso

Per lo specchio convesso si ottengono le stesse formule dello specchio concavo. Si fa il disegno e si ricava facilmente tutto quanto. L'unica differenza è che si avranno  $R < 0$  e  $q > 0$ . Si verifica anche che per P nello spazio oggetto, Q è sempre tra V e il fuoco e che l'ingrandimento è sempre  $0 \leq m \leq 1$ .

## 5.2 Diottri

Si parla di superfici diottriche quando anziché considerare la riflessione si considera la rifrazione. Ovviamente si avrà sempre un po' di riflessione, ma in questo contesto viene trascurata e si studia solo quello che avviene per una superficie diottrica di curvatura sferica.



L'immagine in Q è reale perché ottenuta dai raggi stessi e non dal loro prolungamento. Per angoli piccoli si approssima  $n_1\theta_i = n_2\theta_r$ . Si ha inoltre  $\alpha + \gamma = \theta_i$  e  $\beta + \theta_r = \gamma$ , da cui  $n_1(\alpha + \gamma) = n_2(\gamma - \beta)$ . Operiamo le stesse approssimazioni di prima:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{HH'}{PH'} \Rightarrow \alpha \cong \frac{h}{p} & \tan \gamma &= \frac{HH'}{OH'} \Rightarrow \gamma \cong \frac{h}{R} \\ \tan \beta &= \frac{HH'}{QH'} \Rightarrow \beta \cong \frac{h}{q} \end{aligned}$$

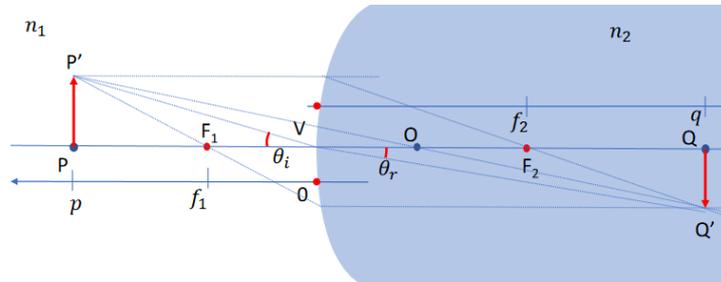
Così si ricava che

$$\begin{aligned} n_1 \left( \frac{h}{p} + \frac{h}{R} \right) &= n_2 \left( \frac{h}{R} - \frac{h}{q} \right) \\ \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} &= \left( \frac{n_2 - n_1}{R} \right) \end{aligned}$$

Se  $p \rightarrow +\infty$ ,  $q = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R := f_2$ . Se  $q \rightarrow +\infty$ ,  $p = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R := f_1$ . Con queste definizioni la formula trovata diventa

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1$$

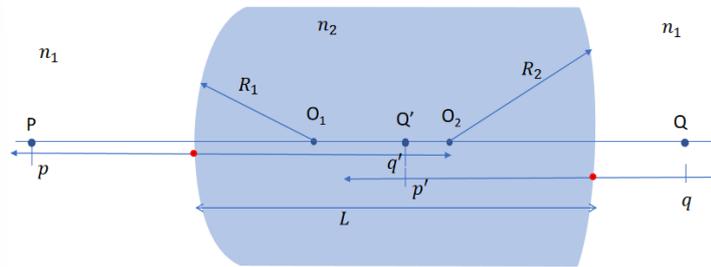
Costruisco l'immagine attraverso il diottri sferico:



I triangoli OPP' e OQQ' sono simili, quindi l'ingrandimento è  $m = \frac{QQ'}{PP'} = \frac{QO}{PO} = \frac{q-R}{q+R} = \frac{n_1 QV}{n_2 PV} = \frac{n_1 q}{n_2 p}$ .

### 5.2.1 Lenti spesse

Consideriamo un sistema ottico costituito da due superfici diottriche che condividono lo stesso asse ottico. Queste costituiscono una lente, in generale una lente spessa, caratterizzata da due raggi di curvatura  $R_1$  e  $R_2$ , un indice di rifrazione e uno spessore  $L$ .



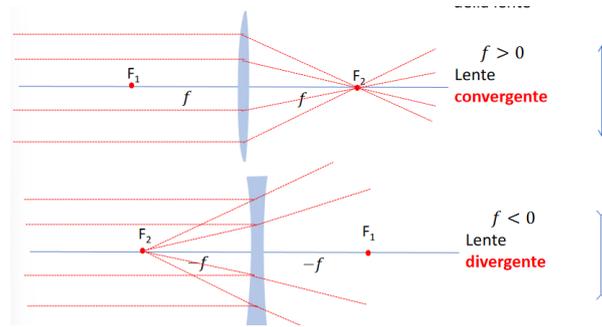
Usando quanto ricavato per i diottri si trova che

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q'} = \left( \frac{n_2 - n_1}{R_1} \right) \qquad \frac{n_2}{p'} + \frac{n_1}{q} = \left( \frac{n_1 - n_2}{R_2} \right)$$

con  $q' + p' = L$ . Approssimiamo per angoli piccoli e consideriamo lenti sottili ( $L \rightarrow 0 \implies p' = -q'$ ).

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q'} &= \left( \frac{n_2 - n_1}{R_1} \right) & \frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{q} &= (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \frac{n_2}{-q'} + \frac{n_1}{q} &= \left( \frac{n_1 - n_2}{R_2} \right) & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \left( \frac{n_2 - n_1}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} \end{aligned}$$

$f$  è detta "distanza focale" della lente,  $D = 1 / f$  è detta "diottria" della lente. Per  $p \rightarrow +\infty$ ,  $q = f$ . Allo stesso modo, per  $q \rightarrow +\infty$  si ha  $p = f$ . Se  $f > 0$  la lente è detta convergente, mentre se  $f < 0$  la lente è detta divergente. L'ingrandimento è identico alla formula vista finora.



Per la costruzione di immagini dobbiamo ricordare tre tipi di raggi importanti: paralleli all'asse ottico (convergono in F2), passanti per V (proseguono dritti) e passanti per F1 (escono paralleli all'asse ottico nello spazio immagine).

## Lezione 24: 14 maggio 2024

### 5.3 Sistemi ottici

Si parla di sistemi ottici quando più superfici ottiche (catottiche o diottriche) concorrono a formare una immagine di un oggetto.

#### 5.3.1 Lenti sottili vicine

Considero due lenti sottili con lo stesso asse ottico collocate vicine, a distanza  $L$  piccola rispetto alle rispettive focali. Le equazioni delle due lenti sono

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{f_1} \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$$

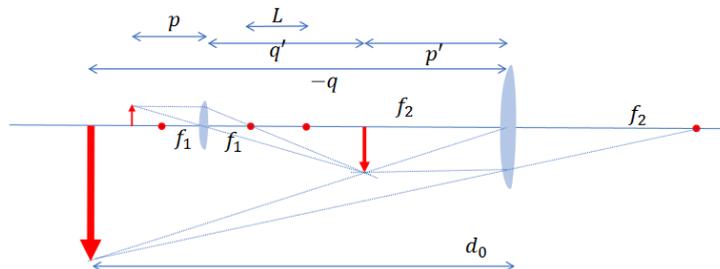
Si ha anche  $q' + p' = L$  che, per  $L \rightarrow 0$  dà  $p' = -q'$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q'} &= \frac{1}{f_1} \\ -\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{f_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

Due lenti sottili vicine si comportano come una lente singola di opportuna focale. È importante perché dall'equazione dei costruttori di lenti sappiamo che  $f_{1,2}(n)$  e  $f_{1,2}(\lambda)$ , quindi scegliendo materiali diversi ed opportuni si può minimizzare la dipendenza di  $f$  da  $\lambda$  per ottenere delle lenti acromatiche.

#### 5.3.2 Microscopio ottico

Il microscopio ottico è costruito per produrre immagini alla distanza migliore per la visione, che è di circa 25 cm. È composto da una lente obiettivo convergente a focale ridotta e una oculare a focale maggiore.



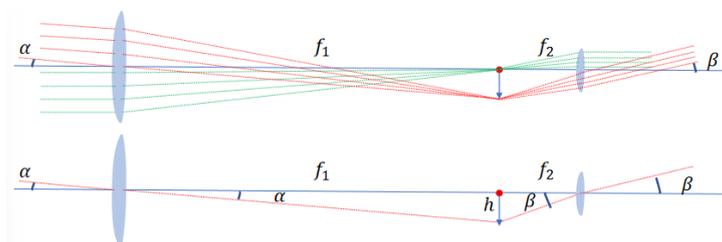
Le equazioni delle lenti sono le stesse di prima:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{f_1} \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$$

Le coordinate sono legate da questa relazione:  $q' + p' = L + f_1 + f_2$ . Scelgo  $L = 16$  cm,  $q \equiv d_0 = 25$  cm,  $f_1 \ll f_2 < L$ . Inoltre con buona approssimazione ho  $p \approx f_1$ ,  $p' \approx f_2$ ,  $q' = L + f_1 + f_2 - p' \approx L + f_1 \approx L$ . L'ingrandimento complessivo risulta  $G = m_1 m_2 \approx \frac{q'}{p} \frac{q}{p'} = \frac{d_0 L}{f_1 f_2}$ . Gli ingrandimenti ragionevoli per i microscopi ottici vanno da 10x a 1000x. Ci sono diversi limiti fisici a questa tecnologia: il primo è la diffrazione. La nostra pupilla può vedere come distinti punti distanti 0.1 mm a 25 cm di distanza. Inoltre una struttura di 1  $\mu$ m appare grande 1 mm, quindi non posso vedere la sua struttura interna. Serve il microscopio elettronico.

### 5.3.3 Telescopio rifrattore

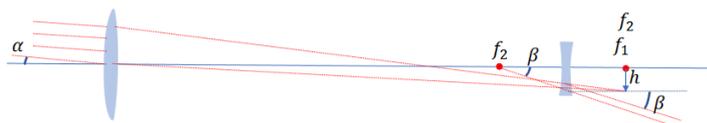
La luce che arriva da molto lontano viaggia per raggi paralleli. Il sistema ottico del telescopio è costituito da una lente obiettivo convergente a focale lunga e una oculare convergente a focale più piccola. Il fuoco della prima lente coincide con il fuoco della seconda.



Si definisce l'ingrandimento angolare

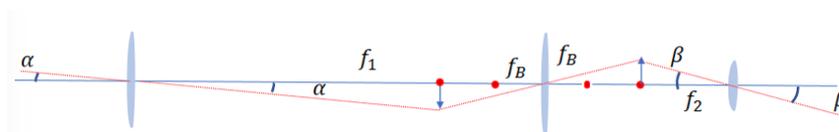
$$M = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{h}{f_2} \frac{f_1}{h} = \frac{f_1}{f_2}$$

Il sistema inverte l'alto con il basso e la destra con la sinistra. Posso sostituire la seconda lente con una lente oculare divergente a focale piccola. Il fuoco della prima lente coincide con il secondo fuoco della seconda. (È il cannocchiale galileiano).



Così il sistema non è invertente. L'ingrandimento angolare è  $M = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{h}{|f_2|} \frac{f_1}{h} = \frac{f_1}{|f_2|}$ .

L'alternativa è usare una "lente di Barlow". Per costruire il cannocchiale terrestre si può aggiungere al telescopio rifrattore una lente di Barlow (fra la prima e la seconda lente) per ribaltare l'immagine. La lente di Barlow è una singola lente convergente a focale piccola (2-4 cm) e un oggetto a  $p = 2f$ . L'ingrandimento angolare è 1.



I binocoli comuni sono costituiti dal telescopio rifrattore e da un sistema per ribaltare le immagini costituito da prismi.

### 5.3.4 Aberrazioni

Si indica con "aberrazione" la differenza tra ciò che si voleva ottenere con un sistema ottico e l'immagine effettivamente ottenuta. Le differenze nascono dalle varie approssimazioni che sono state fatte nella

derivazione delle formule dell'ottica. Si può avere aberrazione cromatica dovuta alla dipendenza di  $f$  dall'indice di rifrazione e dalla lunghezza d'onda. Si può avere aberrazione sferica con i raggi che passano vicini ai bordi della lente. Si risolve usando lenti a grandi raggi e ponendoci davanti un diaframma. Posso avere anche aberrazione di coma quando raggi non parassiali vengono focalizzati in punti diversi. Si può avere anche distorsione a cuscino (ingrandimento maggiore in periferia dell'immagine) o distorsione a barile (ingrandimento maggiore al centro). Nelle slide si trovano immagini di esempio di questi fenomeni.